KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Tentamen 2
Tisdagen den 11 december 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Denna tentamen består av två delar, del A och del B, med vardera 4 uppgifter. Lösningarna på de uppgifter som hör till del A bedöms på skalan Godkänt/Underkänt. Lösningarna på de uppgifter som hör till del B poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Godkänd läsförberedelse ger automatiskt godkänt på uppgift 1 och godkänd kontrollskrivning 3 ger automatiskt 4 poäng på uppgift 5 (som då inte behöver lösas).

För godkänt betyg på denna tentamen krävs Godkänt på samtliga uppgifter som ingår i del A samt minst 6 poäng totalt på del B.

För den som fått Godkänt på samtliga uppgifter på del A kommer betygsgränserna att ges av:

Betyg	A	B	C	D	E
Poäng på del B	14	12	10	8	6

På samtliga uppgifter gäller om inget annat sägs att lösningarna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

(1) Ge en precis matematisk förklaring av vad som menas med en Riemann-summa.

(2) Betrakta integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx.$
A. Beräkna en approximation av integralen med hjälp av trapetsregeln och steglängden $1/2$.
B. Beräkna integralen exakt med hjälp av variabelsubstitutionen $x^2 = t$.

(3) Betrakta differentialekvationen $y'(x) + \dfrac{1}{2}y(x) = x$ med initialvillkoret $y(0) = 2$.
För $y(x)$ som löser differentialekvationen och uppfyller initialvillkoret, gör följande:
A. Beräkna en approximation av $y(1)$ numeriskt med hjälp av Eulers metod och steglängden $1/2$.
B. Beräkna $y(1)$ exakt genom att lösa differentialekvationen och hitta den lösning som också uppfyller initialvillkoret.

(4) Betrakta funktionen $f(x) = \ln(1-x)$.
A. Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring punkten origo alltså) av grad 3 till f.
B. Om $f(x)$ approximeras med $p(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 1/10$, är det då sant att absolutbeloppet av felet är mindre än 10^{-3}?

DEL B

(5) Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_0^1 \tan x\, dx.$

B. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\, dx.$

(6) Funktionen $F(x) = \dfrac{mgR^2}{x^2}$ beskriver, för $x \geq R$, jordens dragningskraft på en kropp med massan m på avståndet x från jordens medelpunkt (g är tyngdaccelerationen och R jordens radie). Om man försummar luftmotståndet, hur stort arbete krävs för att föra massan m från jordytan och ut i rakt ut i rymden, dvs mycket långt bort från jordens medelpunkt?
(Dela in sträckan i små bitar. Från fysiken vet vi att vid konstant kraft och rak väg ges arbetet av kraften (i vägens riktning) gånger sträckan.)

(7) En matematisk modell för en plan pendel (en punktformig massa upphängd i en tunn tråd av längd L meter) ges av differentialekvationen

$$y''(t) + \frac{g}{L}\sin y(t) = 0,$$

där $y(t)$ är utslagsvinkeln i radianer vid tiden t och g är tyndaccelerationen. För små y kan man göra approximationen $\sin y \approx y$ och då får man den betydligt enklare differentialekvationen

$$y''(t) + \frac{g}{L}y(t) = 0. \qquad (*)$$

A. Förklara kort varför man kan göra approximationen $\sin y \approx y$ för små vinklar y. Hur stort är felet i den approximationen?
B. Bestäm $y(t)$ med hjälp av $(*)$ om pendeln vid startögonblicket (då $t = 0$) har utslagsvinkeln 0.3 radianer och hastigheten 0 m/s.

(8) I en punkt på kurvan $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, dras en tangent till kurvan. Koordinataxlarna bildar tillsammans med tangenten en triangel. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha? *(Ur Persson och Böiers: Övningar i analys i en variabel)*