

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder
Kortfattat Lösningsförslag till Tentamen 2012-10-19

————— - DEL A —————

1. Betrakta matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

där matrisen X är obekant.

- A. Vilken storlek (dimension) har X ?
- B. Lös matrisekvationen.
- C. Skriv ett matlabprogram som löser ekvationen och skriver ut resultatet.

Lösning:

A. För att multiplikationen i vänsterledet ska vara definierad och ha som resultat en matris av storlek 3×2 som i högerledet så måste X ha 3 rader och 2 kolonner. Storleken är alltså 3×2

B. Vi inverterar först 3×3 -matrisen i västerledet med hjälp av Gausselimination. Om vi kallar den matrisen för A och enhetsmatrisen av storlek 3×3 för E , så har vi proceduren $(A|E) \sim (E|A^{-1})$ Vi får

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

där vi på punkternas plats har utfört elementära radoperationer. Den sökta inversen är alltså

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Om vi multiplicerar matrisekvationen i uppgiften från vänster med denna matris får vi

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -6 & -7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Parallelogrammet i figuren har hörnpunkter i $P = (2, 1, 2)$, $Q = (0, 3, 2)$ och $R = (1, -1, 1)$.

A. Bestäm koordinaterna för hörnpunkten S .

B. Bestäm parallelogrammets area.

Lösning.

A. Koordinaterna för S ges av $(1, -1, 1) + (0, 3, 2) - (2, 1, 2) = (-1, 1, 1)$

B. Parallelogrammet spänns upp av vektorerna \overline{PQ} och \overline{PR} . Arealen ges av $|\overline{PQ} \times \overline{PR}|$. Vi får alltså

$$\text{Arealen} = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{44}.$$

3. Givet planet $2x - y + 3z = 1$.

A. Avgör om planet innehåller punkten $(1, -1, -1)$.

B. Bestäm en normalvektor för planet.

C. Bestäm en vektor som är parallell med planet.

A. Eftersom $2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot (-1) \neq 1$ så innehåller planet inte punkten $(1, -1, -1)$.

B. Vi läser av en normalvektor direkt från planets ekvation och får att

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor till planet.

C. Vilken vektor som helst som är ortogonal mot normalvektorn är parallell med planet. En är vektorn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallell med planet eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Två linjära avbildningar S och T har matriserna

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A. Vilken matris har den sammansatta avbildningen där S utförs först och därefter T ?

B. Bestäm en vektor \mathbf{u} sådan att $T(\mathbf{u}) = (1, 2)$

Lösning. A. Den sammansatta avbildningens matris är produkten av de ingående avbildningarnas matriser. Eftersom S ska utföras först blir den sammansatta avbildningens matris:

$$BA = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

B. Vi har att

$$T(\mathbf{u}) = T(u_1, u_2) = (1, 2) \iff \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet med Gauss-elimination och får

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1 \\ 2/5 & 1/5 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 20 \end{pmatrix}.$$

Den sökta vektorn är alltså

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

5. För vilka värden på konstanten a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y - az = 1 \\ ax + 4y - z = 0 \\ x + 4y - 4z = 2 \end{cases}$$

exakt en lösning?

Lösning. Ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om determinanten av koefficientmatrisen är nollskild. Vi får

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ a & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 0 & 4 - 3a & a^2 - 1 \\ 0 & 1 & a - 4 \end{pmatrix} = -4a^2 + 16a - 15,$$

som är $\neq 0$ om och endast om $a \neq 3/2$ och $a \neq 5/2$.

Ekvationssystemet har alltså exakt en lösning för alla a utom $3/2$ och $5/2$.

6. Bestäm den funktion på formen $p(x) = c_1 + c_2x^2$ som bäst anpassar till följande värden

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

i minstakvadratmening.

Lösning. Vi får följande överbestämda ekvationssystem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot (-1)^2 = 1 \\ c_1 + c_2 \cdot 1^2 = 2 \\ c_1 + c_2 \cdot 2^2 = 3 \\ c_1 + c_2 \cdot 2^2 = 4 \end{cases},$$

vilket kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Om vi kallar koefficientmatrisen för A , $(c_1, c_2)^T$ för \mathbf{x} och högerledet för \mathbf{b} så blir normalekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet med Gausselimination och får $c_1 = 5/6$ och $c_2 = 2/3$. Den sökta funktionen är därför

$$p(x) = \frac{5}{6} + \frac{2}{3}x^2.$$

7. Bestäm två olika vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} som båda avbildas på vektorn $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$ under en ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(2, -2, 1)$.

Lösning. Vi observerar först att \mathbf{w} är riktningsvektor för den linje på vilken den ortogonala projektionen sker. Projektionsformeln ger att den ortogonala projektionen av en vektor \mathbf{z} på vektorn \mathbf{w} ges av

$$\frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \mathbf{w}.$$

Med $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ och $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$ får vi att \mathbf{z} avbildas på \mathbf{w} under den aktuella ortogonala projektionen om och endast om

$$\frac{2z_1 - 2z_2 + z_3}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det finns många vektorer \mathbf{z} som uppfyller detta samband. Vi kan t ex ta

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så $\mathbf{u} = (1, 1, 9)$ och $\mathbf{v} = (4, 0, 1)$ är två olika vektorer som båda projiceras på \mathbf{w} under en ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(2, -2, 1)$.

8. Bestäm en linje (i parameterform) som skär båda linjerna

$$\ell_1 : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 2, 1)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (2, 1, 1) + t(0, 1, 2)$$

under rät vinkel.

Lösning. En vektor som är ortogonal mot både ℓ_1 och ℓ_2 är

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denna vektor kan vi ta som riktningsvektor för den sökta linjen – då blir den vinkelrät mot de båda andra. Vår linje måste alltså få en ekvation på formen $(x, y, z) = (a, b, c) + t(3, -2, 1)$ för några tal a, b, c . Nu måste bestämma a, b, c så att vår linje också skär de andra båda linjerna.

Vi kan utgå från en punkt på ℓ_1 . Denna punkt har koordinater $(-1 + r, 2r, 1 + r)$ för något värde på parametern r . Om vi startar i denna punkt och går i den riktning som anges av \mathbf{v} hoppas vi komma fram till någon punkt på ℓ_2 . Denna punkt har koordinater $(2, 1 + s, 1 + 2s)$ för något värde på parametern s (observera att vi måste använda olika parametrar för de olika linjerna). Villkoret för att vår linje ska skära de båda andra linjerna blir alltså att:

$$(-1 + r, 2r, 1 + r) + t(3, -2, 1) = (2, 1 + s, 1 + 2s)$$

ska vara uppfyllt för något värde på parametrarna r, s och t . Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} -1 + r + 3t = 2 \\ 2r - 2t = 1 + s \\ 1 + r + t = 1 + 2s \end{cases},$$

som också kan skrivas

$$\begin{cases} r + 3t = 3 \\ 2r - s - 2t = 1 \\ r - 2s + t = 0 \end{cases}.$$

Vi löser detta med Gausselimination och får att det har en unik lösning $r = 3/2$, $s = 1$, $t = 1/2$.

Den sökta linjens ekvation blir därför $(x, y, z) = (1/2, 3, 5/2) + t(3, -2, 1)$. Denna linje är ortogonal mot de båda givna linjerna och skär den första i punkten $(1/2, 3, 5/2)$ och den andra i punkten $(2, 2, 3)$.