

# Reglerteknik AK Tentamen 2012-10-19

## Lösningförslag

### Uppgift 1a

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$Y(s) = -X_1(s) + 2X_2(s), \quad X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s), \quad X_2(s) = \frac{1}{s+2}U(s)$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = -x_1(t) + 2x_2(t), \quad \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t),$$

**Svar:**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (-1 \quad 2)$$

### Uppgift 1b

Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{\frac{K(1-s)}{s(s+1)}}{1 + \frac{K(1-s)}{s(s+1)}} = \frac{K(1-s)}{s(s+1) + K(1-s)} = \frac{K(1-s)}{s^2 + (1-K)s + K}$$

För stabilitet krävs:  $1 - K > 0$  och  $K > 0$ .

**Svar:** Stabilt för  $0 < K < 1$

### Uppgift 1c

Observera att med  $y(t) = x(t)$  så blir  $G(s) = 1/(s - a)$

i) **Svar:**

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{\lambda\tau}d\tau \\ &= e^{at}x(0) + e^{at}\left[\frac{1}{\lambda-a}e^{(\lambda-a)\tau}\right]_0^t = e^{at}\left[x_0 - \frac{1}{\lambda-a}\right] + \frac{1}{\lambda-a}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

ii) **Svar:** Ingen transient om  $x_0 = \frac{1}{\lambda-a}$ . I detta fall blir  $x(t) = G(\lambda)e^{\lambda t}$

## Uppgift 1d

Derivera relationen mellan  $u$  och  $e$

$$\dot{u}(t) = 10\dot{e}(t) + e(t).$$

Approximera tidsderivatan med Tustins formel.

$$\frac{2}{T} \frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}} u(t) = 10 \frac{2}{T} \frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}} e(t) + e(t),$$

Applicera  $1 + q_T^{-1}$  på höger och vänster sida och lös ut  $u(t)$

$$u(t) = u(t - T) + (10 + T/2)e(t) + (T/2 - 10)e(t - T).$$

Insättning med  $T = 0.2$  ger

**Svar:**  $u(t) = u(t - 0.2) + 10.1e(t) - 9.9e(t - 0.2).$

## Uppgift 2a

Vi vill rita rotorten med avseende på  $K$ .

(i). Det slutna systemet blir

$$G_c(s) = \frac{FG}{1 + FG} = \frac{(s + 1)(s - 1)(s + 10)}{(s + 1)(s - 1)(s + 10) + K(1 + 0.5s)}$$

(ii). Vi identifierar  $P(s) = (s + 1)(s - 1)(s + 10) = s^3 + 10s^2 - s + 10$  och  $Q(s) = 1 + 0.5s$ .

(iii). Hittar startpunkter,  $K = 0$ ,

$$P(s) = (s + 1)(s - 1)(s + 10) = 0 \Rightarrow s \in \{-1, 1, -10\}$$

Vi har  $n = 3$  startpunkter.

(iv). Hittar slutpunkter,  $K \rightarrow \infty$

$$Q(s) = 1 + 0.5s = 0 \Rightarrow s \in \{-2\}$$

Vi har  $m = 1$  slutpunkter.

(v). Antal asymptoter =  $n - m = 2$

(vi). Skärningspunkt =  $\frac{1}{n-m} (\sum \text{startpunkter} - \sum \text{slutpunkter}) = \frac{1}{2}(-8) = -4$

(vii). Hitta asymptoter =  $\frac{\pi}{n-m} + \frac{2\pi k}{n-m}$ ,  $k = \{0, 1\}$ , dvs  $\pi/2$  och  $3\pi/2$

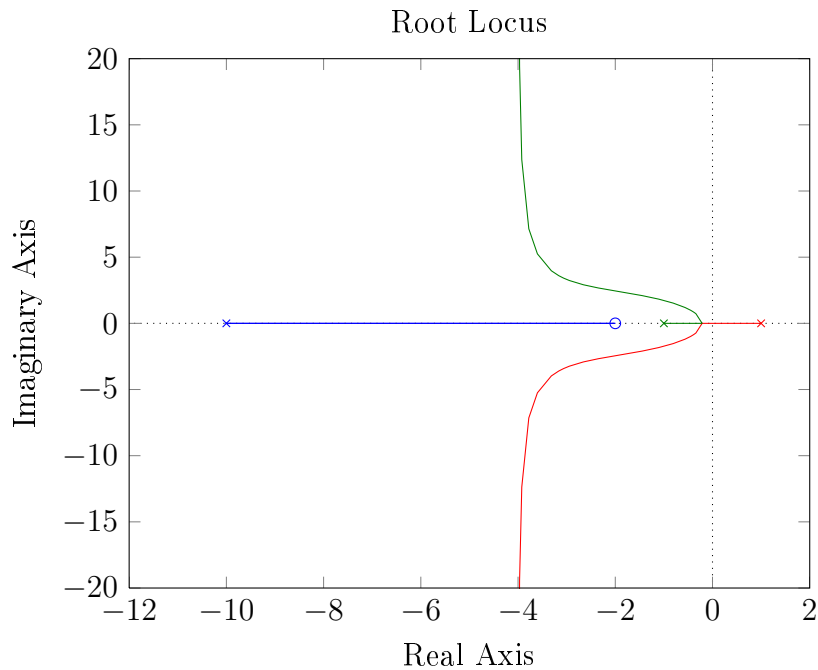


Figure 1: Rotorten med avseende på  $K$  för systemet i uppgift 2(a).

- (viii). Hitta skärning med imaginary axeln.  $P(s) + KQ(s) = 0$ . Ansätt  $s = i\omega$  och lös realdel och imaginärdel för sig.

Realdel:

$$-10\omega^2 - 10 + K/2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K/2 = 10\omega^2 + 10$$

Imaginärdel

$$\omega^3 - \omega + K/2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(K/2 - \omega^2 - 1) = 0$$

Sätt in värdet för  $K$

$$\omega(9\omega^2 + 9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \{0, \pm i\}$$

Men  $\omega = \pm i$  är inte giltiga lösningar efter  $\omega$  är ett reellt tal. Så vi har enbart skärning i origo för  $K = 20$

- (ix). De delar av reella axeln som tillhör rotorten ges av de delar som har ett udda antal start och slutpunkter till höger om sig. Det vill säga mellan  $-10$  och  $-2$  och mellan  $-1$  och  $1$ .
- (x). Den slutgiltiga rotorten finns avbildad i Figur (1)

**Svar:** Det slutna systemet är stabilt för  $K > 20$

## Uppgift 2b

$G(0) = 1$ ,  $G'(0) = -\tau$  medför  $K_I = 1/2\tau$  vilket ger

$$G_c = \frac{\frac{1}{2\tau s(1+\tau s)}}{1 + \frac{1}{2\tau s(1+\tau s)}} = \frac{1}{2\tau s(1+\tau s) + 1} = \frac{1}{1 + 2\tau s + 2\tau^2 s^2}$$

**Svar:** Poler i  $\frac{1}{2\tau}(-1 \pm i)$ . Observera att polernas avstånd till origo är proportionellt mot  $1/\tau$ .

## Uppgift 3a

Systemet har skärfrekvensen  $\omega_c = 0.68$  rad/s, och med den proportionella regulatormåste vi hålla en skärfrekvens över  $\omega_c/4 = 0.17$  rad/s. Där vill vi i andra hand maximera fasmarginalen, vilket uppnås vid det lokala maximum  $\omega = 0.255$  rad/s, en fasmarginal på  $52^\circ$  och där amplituden för systemet är  $|G(i\omega)| = 2.98$ .  $K$ -värdet väljs alltså till  $K = 1/2.98 = 0.34$  för att uppnå den skärfrekvensen. **Svar:**  $K = 0.34$

## Uppgift 3b

Vi vill nu behålla samma fasmarginal  $\phi_m = 52^\circ$ , samt ändra skärfrekvensen till  $\omega_{c,d} = 5 * 0.255 = 1.275$  rad/s. Fasen är där  $-195^\circ$ , och behöver alltså höjas med  $67^\circ$ , plus  $6^\circ$  för lag-kompensatorn. Totalt  $73^\circ$ , och vi väljer därför att använda dubbla lead-kompensatorer, som vardera höjer fasan med  $37^\circ$ .

$$\beta = 0.25, \tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.57$$

$$K = \frac{\beta}{|G(i\omega_{c,d})|} = 0.72, \text{ där } |G(i\omega_{c,d})| = 0.35.$$

Slutligen bestämmer vi lag-kompensatorn. Vi har att

$$\frac{1}{1 + K_P G(0)} \cdot 0.1 = \frac{1}{1 + \frac{K_{lead}}{\gamma} G(0)}$$

Med  $|G(0)| = 880$  fås  $\gamma = 0.21$ .  $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 7.8$ .

**Svar:** Den kompletta regulatorm blir

$$F_{lead-lag}(s) = K \left( \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \right)^2 \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

med  $K = 0.72$ ,  $\beta = 0.25$ ,  $\tau_D = 1.57$ ,  $\gamma = 0.21$  och  $\tau_I = 7.8$ .

## Uppgift 4a

Derivering av tillståndsvektorn m.a.p. tiden ger

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_4 \\ \underbrace{-u \cos(x_1 - x_2) + x_2^2 \sin(x_1 - x_3) - \sin(x_3)}_{=f(x,u)} \end{bmatrix}$$

## Uppgift 4b

Jämviktspunkten uppfyller  $f(x_0, u_0) = 0$ , vilket ger:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_0 = 0$$

Det lineariserade systemet ges av

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u$$

där

$$A = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u \sin(x_1 - x_3) & 2x_2 \sin(x_1 - x_3) & -u \sin(x_1 - x_3) & 0 \\ +x_2^2 \cos(x_1 - x_3) & & -x_2^2 \cos(x_1 - x_3) & 0 \\ & & -\cos x_3 & 0 \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\cos(x_1 - x_3) \end{bmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

### Uppgift 4c

Systemet är stabilt om alla egenvärden till  $A$  har strikt negativ realdel. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - sI) = \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix} = s^2(s^2 - 1)$$

vilket ger lösningarna  $s_1 = s_2 = 0$ ,  $s_{3,4} = \pm 1$ . Alltså är systemet instabilt. Jämviktsläget  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$  motsvarar en inverterad dubbelpendel, som inte kommer att förbli i sitt jämviktsläge.

### Uppgift 4d

Polerna till  $A - BL$  kan placeras godtyckligt om  $(A, B)$  är styrbart. Vi undersöker rangen för styrbarhetsmatrisen:

$$\mathcal{S} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efterson  $\mathcal{S}$  har full rang så är  $(A, B)$  styrbart, och polerna till  $A - BL$  kan därför väljas godtyckligt. Vi väljer  $L$  så att polerna till  $A - BL$  hamnar i VHP. Till exempel kan vi välja en pol av ordning 4 i  $-1$ , vilket ger oss den önskade karakteristiska ekvationen

$$0 = (s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

Karakteristiska ekvationen för  $A - BL$  är

$$\begin{aligned} \det(A - BL - sI) &= \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & -l_3 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & -l_3 & -l_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & -l_2 - s & l_3 & l_4 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ -l_1 & -l_2 & 1l_3 & l_4 - s \end{bmatrix} \\ &= -l_1 - l_2 s + (l_1 - l_3 - 1) s^2 + (l_2 - l_4) s^3 + s^4 \end{aligned}$$

Genom att jämföra koefficienterna i dessa polynom med varandra får vi  $l_1 = -1$ ,  $l_2 = -4$ ,  $l_3 = -8$ ,  $l_4 = -8$ .

**Svar:** Systemet är styrbart och t.ex.  $u(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) - 8x_3(t) - 8x_4(t)$  ger ett stabilt återkopplat system

## Uppgift 5a,b

$$G_o(i\omega) = \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega T} = \frac{1}{\omega} e^{-i(\omega T + \pi/2)}$$

och  $|G_o(i\omega)| = 1$  vid skärfrekvensen  $\omega_c = 1$ . Fasen är då  $-\pi/2 - T$ , dvs fasmarginalen är  $\varphi_m = \pi/2 - T$ . Här inses att  $T < \pi/2$  krävs för stabilitet.

Observera att  $|G_o(i\omega_c)| = 1$  medför att

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = |G_c(i\omega_c)|$$

dvs räkningarna högst upp på sidan 103 i kursboken ger

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\varphi_m/2)}$$

**Svar:**  $\omega_c = 1$ ,  $\varphi_m = \pi/2 - T$ , där  $T < \pi/2$  för positiv fasmarginal,  $|S(i\omega_c)| = 1/(2 \sin(x))$ ,  $0 \leq x < \pi/4$ , där  $x = \pi/4 - T/2$ .

## Uppgift 5c,d

$G_o(i\omega)$  skär reella axeln då  $\omega_p T = \pi/2$ , dvs  $\omega_p = \pi/(2T)$ , där  $T < \pi/2$  för stabilitet. Förstärkningen blir

$$G_o(i\omega_p) = -\frac{2T}{\pi} \Rightarrow |S(i\omega_p)| = \frac{1}{(1 - 2T/\pi)}, \quad A_m = \pi/(2T)$$

**Svar:**  $\omega_p = \pi/(2T)$ ,  $A_m = \pi/(2T)$ , där  $T < \pi/2$  för  $A_m > 1$ .  $|S(i\omega_p)| = \pi/(4x)$ ,  $0 \leq x < \pi/4$ , där  $x = \pi/4 - T/2$ .

## Uppgift 5e

Vi behöver avgöra när

$$\frac{4x}{\pi} < 2 \sin(x), \quad 0 \leq x < \pi/4$$

Om så är fallet så är  $|S(i\omega_p)| > |S(i\omega_c)|$  och uppskattningen vid fas-skärfrekvensen ger bäst uppskattning av  $M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)|$ . Låt  $f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin(x)$ , för vilket  $f(0) = 0$  och  $f(\pi/4) = 1/2 - 1/\sqrt{2} < 0$ . Derivatans tecken är negativ

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos(x) < 0, \quad 0 \leq x < \pi/4$$

eftersom  $\cos(x) > \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} > 2/\pi$  för  $0 \leq x < \pi/4$ . Funktionen  $f(x)$  därmed är avtagande i hela intervallet, dvs

$$\frac{4x}{\pi} < 2 \sin(x), \quad \forall 0 < x < \pi/4$$

**Svar:** För detta exempel med  $0 < T < \pi/2$  ger alltid  $|S(i\omega_p)|$  bästa uppskattningen av  $M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)|$ .