KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Lösningsförslag till Tentamen 1, 2012-10-16

(1) Funktionen $f(t) = 3e^{-t/200}$ beskriver, för $t \geq 0$, mängden i mg av ett visst radioaktivt ämne vid tidpunkten t timmar.

A. Avgör om f är inverterbar och bestäm inversen f^{-1}, om den finns.

B. Bestäm halveringstiden för ämnet.

Lösning. A. Vi deriverar och får $f'(t) = -\frac{3}{200}e^{-t/200}$ som existerar och är negativt för alla t i definitionsmängden för f, dvs för alla reella tal $t \geq 0$. Det följer att funktionen f är strängt avtagande. Det betyder att f är injektiv och har invers. Vi beräknar inversen genom att sätta $y = f(t)$ och lösa ut t:

$$\begin{aligned} y = f(t) &\iff y = 3e^{-t/200} \\ &\iff \frac{y}{3} = e^{-t/200} \\ &\iff \ln\frac{y}{3} = -\frac{t}{200} \\ &\iff -200\ln\frac{y}{3} = t. \end{aligned}$$

Inversen f^{-1} ges alltså av $f^{-1}(y) = -200\ln(y/3)$. (Detta visar också att inversen existerar.)

B. Halveringstiden är den tid det tar för mängden av ämnet att halveras. Eftersom $f(0) = 3$ mg så är halveringstiden den tidpunkt T då $f(T) = 3/2$ mg. Vi söker denna tidpunkt T och får att

$$f(T) = \frac{3}{2} \iff 3e^{-T/200} = 3/2 \iff -\frac{T}{200} = \ln\frac{1}{2} \iff T = 200\ln 2.$$

□

Svar: A. Ja, $f^{-1}(y) = -200\ln(y/3)$. B. Halveringstiden är $200\ln 2$ timmar.

(2) Låt $f(x) = \tan x$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat $\pi/3$.

Lösning. Först obeserverar vi att $f(\pi/3) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Den punkt på kurvan i vilken vi ska ta tangenten är alltså $(\pi/3, \sqrt{3})$. Därefter deriverar vi och får att $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, vilket betyder att $f'(\pi/3) = 4$. Tangenten är då den linje genom punkten $(\pi/3, \sqrt{3})$ som har riktningskoefficient 4. En ekvation för tangenten är därför

$$y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$\square$

Svar: $y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(3) Låt $f(x) = \ln(1 + x^2) - \arctan x$. Avgör om f antar något största respektive minsta värde och bestäm i förekommande fall dessa.

Lösning. Vi konstaterar först att definitionsmängden för f är alla reella tal x. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x-1}{1+x^2},$$

vilket existerar för alla reella tal x. Vi ser vidare att

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vi teckenstuderar derivatan:

Om $x < 1/2$ så är $f'(x) < 0$, vilket ger att f är strängt avtagande på detta intervall.

Om $x > 1/2$ så är $f'(x) > 0$, vilket ger att f är strängt växande på detta intervall.

Det följer av ovanstående att f tar sitt minsta värde i $x = 1/2$ och detta minsta värde är $f(1/2) = \ln(5/4) - \arctan(1/2)$. Av gränsvärdesberäkningen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ följer att f inte tar något största värde.

$\square$

Svar: Största värde saknas, minsta värde är $f(1/2) = \ln(5/4) - \arctan(1/2)$

(4) A. Beräkna med hjälp av partiell integration integralen

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$$

B. Beräkna med hjälp av substitutionen $t = \cos x$ integralen

$$\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin x\,dx.$$

Lösning. A. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx = -e^{-1} - [e^{-1}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

B. Med substitutionen $t = \cos x$ får vi att $dt = -\sin x\,dx$, samt att de nya gränserna för t blir 1 resp $1/2$. Därför kan vi beräkna integralen:

$$\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin x\,dx = \int_1^{1/2} -t^3\,dt = \int_{1/2}^1 t^3\,dt = \frac{15}{64}.$$

□

Svar: A. $1 - \dfrac{2}{e}$ B. $15/64$

DEL B

(5) Låt $f(x) = x^3 + x - 3$.
A. Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning x i intervallet $1 < x < 2$.
B. Approximera lösningen med hjälp av Newton-Raphsons metod. Använd startvärdet $x_0 = 1$, gör två iterationer av metoden och svara med x_2.

Lösning. A. Funktionen f är ett polynom och alltså kontinuerlig överallt. Eftersom $f(1) = -1$ och $f(2) = 7$ ger satsen om mellanliggande värden att det finns ett x mellan 1 och 2 sådant att $f(x) = 0$. Att det inte kan finnas två sådana x följer av att $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, vilket medför att f är strängt växande.

B. Newton-Raphson säger att

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Med $x_0 = 1$ får vi

$$x_1 = 1 - \frac{-1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Kör vi metoden en gång till får vi

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\frac{125}{64} + \frac{5}{4} - 3}{3 \cdot \frac{25}{16} + 1} = \frac{442}{364} = \frac{17}{14}.$$

$\square$

Svar: A. Se lösningen. B. $17/14$.

(6) Låt $f(t) = Mte^{-t^2/\mu^2}$, där M och μ är positiva konstanter. Teckenstudera derivatan, beräkna gränsvärdena i $\pm\infty$ och avvgör om f har något största respektive minsta värde. Skissa sedan grafen $y = f(t)$.

Lösning. Vi observerar först att definitionsmängden till f är alla reella tal t. Vi deriverar och får

$$f'(t) = Me^{-t^2/\mu^2} + Mte^{-t^2/\mu^2}\left(-\frac{2t}{\mu^2}\right) = Me^{-t^2/\mu^2}\left(1 - \frac{2t^2}{\mu^2}\right),$$

som existerar för alla t. Vi ser att $f'(t) = 0 \iff t = \pm\mu/\sqrt{2}$. Vi gör nu ett teckenstudium av derivatan och får:

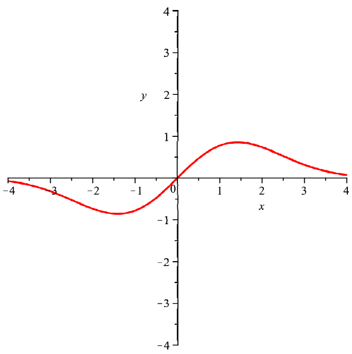
Om $t < -\mu/\sqrt{2}$ så är $f'(t) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande på detta intervall.

Om $-\mu/\sqrt{2} < t < \mu/\sqrt{2}$ så är $f'(t) > 0$ och det följer att f är strängt växande på detta intervall.

Om $\mu/\sqrt{2} < t$ så är $f'(t) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande på detta intervall.

Eftersom $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ (standardgränsvärden) kan vi nu dra slutsatsen att f har ett största värde som är $f(\mu/\sqrt{2}) = M\mu/\sqrt{2e}$ och ett minsta värde som är $f(-\mu/\sqrt{2}) = -M\mu/\sqrt{2e}$.

Vi kan nu skissa grafen $y = f(t)$:



(Obs: i denna graf har vi valt specifika värden på de positiva konstanterna M och μ, men det kvalitativa utseendet hos grafen är likadant oavsett vilka värden man väljer.) $\square$

Svar: Största värdet är $f(\mu/\sqrt{2}) = M\mu/\sqrt{2e}$ och minsta värdet är $f(-\mu/\sqrt{2}) = -M\mu/\sqrt{2e}$. Grafen ses ovan

(7) A. Låt $f(x)$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{då } x \neq 0 \\ a & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Går det att bestämma konstanten a så att f blir kontinuerlig i origo? Om det går, gör det!

B. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1}.$$

Lösning. A. För att f ska vara kontinuerlig i origo är det nödvändigt och tillräckligt att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi ser direkt att $f(0) = a$. När x går mot noll så går $1/x^2$ mot oändligheten och av detta följer att

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Om vi väljer $a = 0$ får vi alltså att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ och f blir kontinuerlig.

B. Om $f(x) = x^{11}$ så är $f'(x) = 11x^{10}$ och speciellt så är $f'(1) = 11$. Men enligt derivatans definition så är

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1},$$

vilket är gränsvärdet i uppgiften. Det följer att

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{11}-1}{x-1} = 11.$$

□

Svar: A. $a = 0$ B. 11

(8) En sfärisk vattenbehållare med radien 1 m fylls med vatten i en takt av 0.4 kubikmeter per timme. Hur snabbt stiger vattenytan i det ögonblick då djupet i tanken är 0.3 m?

Tips: Sambandet mellan volymen V och vattendjupet h är $V = \pi(h^2 - \frac{h^3}{3})$.

Lösning. I det givna sambandet mellan V och h konstaterar vi att både V och h förändras med tiden, dvs är funktioner av t. Vi deriverar det givna sambandet med avseende på t och får

$$V'(t) = \pi\left(2h(t)h'(t) - \frac{3h(t)^2h'(t)}{3}\right).$$

Det vi söker är $h'(t)$ i det ögonblick då $h = 0.3$. Vi vet att $V'(t) = 0.4$ för alla t. Insättning av detta i vårt derivatasamband ger att

$$0.4 = \pi(2 \cdot 0.3 \cdot h'(t) - \frac{3 \cdot 0.3^2 \cdot h'(t)}{3}) = \pi(2 \cdot 0.3 \cdot h'(t) - 0.3^2 \cdot h'(t)).$$

Här kan vi lösa ut vår sökta storhet $h'(t)$. Vi får att i det aktuella ögonblicket är

$$h'(t) = \frac{0.4}{\pi(2 \cdot 0.3 - 0.3^2)} = \frac{40}{51\pi} \text{ meter per timme.}$$

$\square$

Svar: $\frac{0.4}{\pi(2 \cdot 0.3 - 0.3^2)} = \frac{40}{51\pi}$ meter per timme.