■ 1

Matrisen A definieras av

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Är nedanstående påståenden sanna eller falska?
Motivera noga dina svar. Rätt svar utan godtagbar motivering ger ej poäng.

a) $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ är invers till A. (1 p)

b) $\det A = 0$ (1 p)

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ är en lösning till ekvationen $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1 p)

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ är en lösning till ekvationen $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1 p)

e) Vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en bas för R^3. (1 p)

■ *2*

Är nedanstående vektorer linjärt oberoende?

a. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ *b.* $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

■ 3

Nedanstående totalmatris beskriver ett linjärt system med fyra obekanta.
Bestäm den generella lösningen till systemet. Svara på vektorform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -9 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

■ 4

Lös följande ekvationssystem fullständigt, för alla värden på k.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x + y \quad - k z} &= \mathbf{5} - \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{-x \qquad + 2 k z} &= \mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{2} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x + y - }\mathbf{2}\boldsymbol{k z} &= \mathbf{7} - \mathbf{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

■ 5

Finn en ortogonal bas för det vektorrum som spänns upp nedanstående vektorer. Var noga med att motivera giltigheten för ditt svar.

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

■ 6

Studera två transformationer i R^2

$\boldsymbol{T_1(x) = A_1\, x}$
$\boldsymbol{T_2(x) = A_2\, x}$

sådana att:

T_1 roterar punkten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vinkeln φ medurs kring origo och

T_2 speglar punkten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ i x_1-axeln (dvs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avbildas på $\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$).

a) Bestäm transformationsmatriserna A_1och A_2

b) Studera en fyrhörning med hörnen i punkterna (1,1), (2,1), (3,2), (2,2). Vad händer om den först roteras enligt T_1, med $\varphi = \pi/3$, och sedan speglas enligt T_2? Bestäm transformationsmatrisen för den sammansatta transformationen, och rita en figur som visar fyrhörningens läge före och efter transformationen.

c) Gör nu samma sak som i b), men spegla först och rotera sedan (med $\varphi = \pi/3$).

■ 7

Vi har ett komplext tal w, sådant att

$$w = \frac{z_1}{z_2}\, z_3$$

där $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$; $z_2 = 2\, e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_3 = 3\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

a) Bestäm $|w|$. (1 p)

b) Bestäm arg w. (2 p)

c) Bestäm real- och imaginärdel för w. (2 p)

■ 8

Vid en mätuppgift fick man följande mätpunkter för (x, y) :
(1, 4); (2, 2); (3, 1), (4, 3).

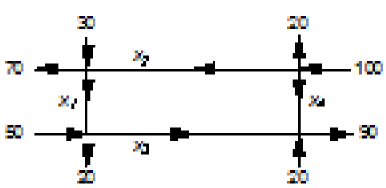
Man vill nu bestämma den andragradskurva
$$y = \beta_0 + \beta_1\, x + \beta_2\, x^2$$
som ger bästa anpassningen till dessa punkter.

Därvid försöker man hitta den lösning till ekvationen
$$X\, \beta = y$$
som ger bäst anpassning till andragradskurvan.

Ange hur matrisen X samt vektorerna $\boldsymbol{\beta}$ och $\mathbf{y}$ ser ut.

■ 9

Ange en totalmatris som beskriver trafiksystemet i figuren. Man kan anta att flödet bevaras i varje korsning.



■ 10

För matrisen A gäller att det $A \neq 0$.
Ange fem olika egenskaper för A eller det linjära system som beskrivs av A.

Varje godkänd egenskap ger 1 poäng. (Max 5 p).
Varje felaktigt påstående ger -1poäng.

■ 11

Punkterna $P_1(4, -1, 1)$ och $P_2(2, 2, 2)$ ligger i ett plan som utgör ett underrum W till R^3. Bestäm en ortonormal bas för W.

■ 12

Lös ekvationen $z^8 = -\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$.

Ange en generell lösning, plotta lösningarna i en figur och ange explicit argumentet (grader eller radianer) för varje lösning.

■ 13

Bestäm kortaste avståndet från punkten(1, 2, 3) till det underrum som spänns upp av vektorerna (1, -1,2) och (-1,3,2).

■ 14

Ett plan genom origo har normalen (2, 1, -4).
Bestäm skärningen mellan planet och linjen x = (1, 7, 1) + t (1, 5, 0)

■ 15

Från punkten $\mathbf{P} = (3, 3, 3)$ går fyra vektorer $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ till punkterna $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ respektive $\mathbf{P}_4$.

$\boldsymbol{V}_1 = (-1, -4, 1)$, $\boldsymbol{V}_2 = (0, -3, 2)$, $\boldsymbol{V}_3 = (-1, -4, 4)$, $\boldsymbol{V}_4 = (-2, -5, 3)$.

a) Bestäm $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ och $\mathbf{P}_4$.

b) Bestäm vektorerna $\overrightarrow{P_1 P_2}$, $\overrightarrow{P_2 P_3}$ $\overrightarrow{P_3 P_4}$ och $\overrightarrow{P_4 P_1}$ och deras längd.

c) Visa att vektorerna i *b)* är parvis parallella och parvis ortogonala.