1. Vi löser systemet med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \quad + \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2 \quad - \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Väljer vi $t = x_3$ som parameter kan lösningen skrivas upp som

$$x_1 = -1 - 2t, \quad x_2 = 3 + t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1.$$

2. a) Subtrahera två gånger den andra raden från den tredje raden. Detta ger en rad med många nollor som vi kofaktorutvecklar längs,

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

I denna determinant subtraherar vi tre gånger andra raden från den tredje raden och får en rad som vi kofaktorutvecklar längs

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ -3 \\ \\ \end{array} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 7 \cdot (-5) \cdot 18 = -630.$$

b) Vi ställer upp räkneschemat $(A\,|\,E)$ och radreducerar tills den vänstra halvan blir E. I den högra halvan kan vi då avläsa A^{-1},

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2 \quad - \\ \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ + \quad + \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Inversen är alltså $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Med räknereglerna får vi att

$$(A^{-1}+B)^T A^T = ((A^{-1})^T + B^T)A^T = (A^{-1})^T A^T + B^T A^T = (A^T)^{-1} A^T + B^T A^T = E + (AB)^T.$$

Stoppar vi in värdet på AB får vi att

$$(A^{-1}+B)^T A^T = E + (AB)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$