EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 8:
Styrbarhet och observerbarhet

Kursinformation

- Lab 3: Anmälningslistor ligger fortfarande ute på kurshemsidan. Ingen partner för Lab 3? Kolla och skriv upp dig på lista eller maila mig (hsan@kth.se)

- Övningsfrågor till Lab 2 finns tillgängliga i BILDA
- Tentaanmälan via ”Mina sidor”. Stänger 2 veckor för tentan.

Innehåll

- Tillståndsmodeller (repetition)
  - Definition
  - *G(s)* $\leftrightarrow$ tillståndsmodell
  - Poler från tillståndsmodell
- Lösning av tillståndsekvation
- Styrbarhet och observerbarhet
- (Tillståndsåterkoppling)

Fördelar med tillståndsmodeller

- naturligt vid modellbygge
- tillstånd har oftast fysikalisk betydelse
- lämpligt vid simulering
- återkoppling från flera mätningar på systematiskt sätt
- system med flera in- och utsignaler kan behandlas inom samma ramverk

Tillståndsmodeller

Tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

där $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^p$ och oftast $m = p = 1$ i denna kursen.

- Vektorn $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t) \ldots x_n(t))^T$ - systemets tillstånd.
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$, dvs. lagrar information om tidigare u.

Jämför med faltningsformeln:

$$Y(s) = G(s)U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Från högre ordnings differentialekvation till tillståndsmodell

(Glad & Ljung sid. 150-151)

Given modell: $\dddot{y}(t) + a_1\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3 y(t) = bu(t)$

Inför tillstånd:

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$
$$x_3(t) = \ddot{y}(t)$$

Jämför med modell:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = -a_1x_3(t) - a_2x_2(t) - a_3x_1(t) + bu(t)$$

Tillståndsmodell:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} u(t)$$

Linjärisering

- Olinjär modell

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

- En stationärpunkt (x_0, u_0) ges av $\dot{x} = 0$, dvs.

$$f(x_0, u_0) = 0$$

- För små avvikelser $\Delta x, \Delta u$ från stationärpunkten gäller (Taylorutveckling)

$$\Delta\dot{x} = f_x(x_0, u_0)\Delta x + f_u(x_0, u_0)\Delta u$$

dvs. $A = f_x(x_0, u_0), B = f_u(x_0, u_0)$. (Jacobianer)

- Motsvarande för y

$$\Delta y = h_x(x_0, u_0)\Delta x + h_u(x_0, u_0)\Delta u$$

$G(s) \leftrightarrow$ Tillståndsmodell

- $G(s) \longrightarrow$ tillstånd:

1. $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \ldots$. (Enklast. Bara om $G(s)$ inte har s i täljaren.)
2. Diagonalform, dvs. ger A diagonal. (Partialbråksuppdelning)
3. Observerbar form.
4. Styrbar form.

- Tillstånd $\longrightarrow G(s)$:
  Laplace ger

Föreläsning 7 slutade här

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \boxed{C\frac{adj\ (sI - A)}{det(sI - A)}B}$$

OBS! Rötterna til $det(sI - A) = 0$: egenvärden till A, poler till $G(s)$.

Exempel: Tillståndsmodell $\rightarrow$ *G(s)*

Givet:
(Från ex. metod 1)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C} x$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{adj}(sI - A) = \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix},$$

$$\det(sI - A) = s(s+3) - (-1)2 = s^2 + 3s + 2$$

$$G(s) = C\frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

Testa vad som händer med tillståndsmodell från ex. metod 2

Styrbarhet och observerbarhet

Givet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- **Styrbarhet:** kan vi mha styrsignalen $u(t)$ styra tillståndet $x(t)$ till godtyckligt tillstånd x^* på ändlig tid?
- **Observerbarhet:** kan vi mha mätningen $y(t)$ skatta tillståndet $x(t)$?

$\Rightarrow$ bestäm sambandet mellan $x(t)$ och $u(t)$, samt mellan $y(t)$ och x_0, dvs. lös tillståndsmodellen.