SF1626 Flervariabelanalys

Sebastian Olsson

13 september 2012

Sammanfattning

Lösningsförslag/-skiss för uppgifterna 4.20 och 4.25 som jag gick igenom på övningen 12/9.

1 Uppgift 4.20

Vi vill optimera

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(2 + x^2 + y^2)^2}$$

på området $-1 \le y \le 1$, som vi kan kalla D.

Området är ej kompakt, vilket medför att existensen av ett minsta och största värde inte garanteras. En lösning är att "kompaktifiera" området D genom att införa det kompakta, rektangulära området

$$D' = \{(x,y) : \ -1 \le y \le 1, \ -a \le x \le a\}$$

på vilken vi sedan söker efter stationära punkter, randstationära punkter och hörnpunkter i vanlig ordning. Här är a en konstant som vi låter vara obestämd.

Vi kan direkt se att hörnpunkterna är $(a,1)$, $(a,-1)$, $(-a,1)$ och $(-a,-1)$. De stationära punkterna finner vi genom att lösa systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Att finna randpunkterna är kanske knepigast. Vi använder samma metod som på s. 167 i Persson-Böiers, vilket innebär att vi finner randpunkter, uttryckta i a, och sedan utifrån lösningarna ställer upp en funktion $m(a)$ som vi optimerar.

D' har fyra kanter, men vi behöver bara studera två av dem (lämpligen den övre och den högra i rektangeln) eftersom funktionen är symmetrisk i x- och y-axeln. Kanterna utgörs av

$$\gamma_1 = \{(x,y):\ -a < x < a,\ y = 1\}$$
$$\gamma_2 = \{(x,y):\ x = a,\ -1 < y < 1\}$$

För den övre kanten, inför

$$g_1(t) = f(t,1) = \frac{t^2-1}{(3+t^2)^2}$$

Ur $g_1'(t) = 0$ erhåller vi de randstationära punkterna $(0,0)$, $(-\sqrt{5},1)$ och $(\sqrt{5},1)$. För den högra kanten, inför

$$g_2(t) = f(a,t) = \frac{a^2-t^2}{(2+a^2+t^2)^2}$$

Ur $g_2'(t) = 0$ erhåller vi lösningarna $t = 0$ och $t = \pm\sqrt{3a^2+2}$.

För $t = 0$, inför funktionen

$$m_1(a) = g(0) = \frac{a^2}{(2+a^2)^2}$$

och lös $m_1'(a) = 0$. Denna har lösningarna $a = 0$ och $a = \pm\sqrt{2}$, vilket visar att $(0,0)$, $(0,-\sqrt{2})$ och $(0,\sqrt{2})$ är ytterligare tre randpunkter.

För $t = \pm\sqrt{3a^2+2}$, inför funktionen

$$m_2(a) = g(\pm\sqrt{3a^2+2}) = \frac{a^2-(3a^2+2)}{(2+a^2+3a^2+2)^2} = \frac{-2a^2-2}{(4+4a^2)^2}$$

och lös $m_2'(a) = 0$. Denna har den enda lösningen $a = 0$, vilket visar att $(0,\sqrt{3\cdot 0^2+2}) = (0,\sqrt{2})$ är ytterligare en randpunkt (som vi emellertid redan fann).

Nu är vi snart klara. Vi behöver avgöra karaktären av varje randstationär punkt (kan göras med teckenstudium) för att fastställa om en punkt är ett lokalt minimum eller ett -maximum. Vi behöver också studera vad som händer då $a \to \infty$. Då kommer tydligen $f(x,y)$ att gå mot noll eftersom nämnaren dominerar täljaren.

Sedan återstår bara att beräkna funktionsvärdet $f(x,y)$ för alla punkter som vi har funnit, inklusive hörnen. Det maximala lokala maximat på området är funktionens största värdet och det minimala lokala minimat är dess minsta.

2 Uppgift 4.25

Vi vill finna det största och det minsta avståndet från origo till ellipsen

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0 \tag{1}$$

Avståndet från en godtycklig punkt (x, y) till origo ges av $\sqrt{x^2 + y^2}$. Vi behöver finna de punkter (x, y) som både uppfyller ekvation (1) och minimerar/maximerar $\sqrt{x^2 + y^2}$. Eftersom kvadratrotsfunktionen är växande är detta samma sak som att minimera/maximera uttrycket $x^2 + y^2$. Då $\sqrt{x^2 + y^2}$ är minimal är $x^2 + y^2$ minimal, och vice versa.

Låt nu

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{2}$$

$$g(x, y) = 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 \tag{3}$$

Vår uppgift är att optimera $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Detta kan vi göra på fyra sätt.

2.1 Alternativ 1

"Standardmetoden" i flervariabelanalysen är att använda Lagranges multiplikatormetod. För att $f(x, y)$ ska bli minimal/maximal under bivillkoret $g(x, y) = 0$ måste gradienterna till f och g vara parallella. Med andra ord måste

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \cdot \text{grad } g(x, y) \tag{4}$$

uppfyllas för någon konstant λ. Dessutom måste bivillkoret $g(x, y) = 0$ vara uppfyllt. Detta ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Partialderivera och uttryck $g(x, y)$:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot (26x + 10y) \\ 2y = \lambda \cdot (26y + 10x) \\ 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0 \end{cases}$$

Isolera λ:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x}{13x+5y} \\ \lambda = \frac{y}{13y+5x} \\ 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0 \end{cases}$$

Eliminera λ:

$$\begin{cases} \frac{y}{13y+5x} = \frac{x}{13x+5y} \\ 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0 \end{cases}$$

Lös övre ekvationen:

$$\begin{cases} x = \pm y \\ 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0 \end{cases}$$

Efter insättning av $x = \pm y$ i den nedre ekvationen erhålles lösningarna

$$x = -\sqrt{\frac{36}{13-5}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ eller } x = \sqrt{\frac{36}{13+5}} = \sqrt{2}.$$

$f(x, y)$ minimeras/maximeras alltså i 4 punkter:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ (x_2, y_2) &= \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\ (x_3, y_3) &= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \\ (x_4, y_4) &= \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Avstånden kan nu beräknas som $\sqrt{f(x, y)}$ för de fyra lösningnarna ovan. Det största beräknade värdet är det största avståndet från origo till en punkt på ellipsen, och det minsta beräknade värdet är det minsta avståndet.

2.2 Alternativ 2

Ett annat sätt, som inte kräver att vi inför multiplikatorn λ, är att istället lösa systemet

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

där

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

2.3 Alternativ 3

Beskriv ellipsen på parameterform:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t) \\ y = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t) - \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{cases}$$

Vi kan kontrollera att denna parametrisering är korrekt genom att sätta in detta i ekvationen $13x^2+13y^2+10xy = 72$. Då erhåller vi nämligen $72 = 72$, vilket är sant för alla t. Hur man däremot kommer fram till att ellipsen kan beskrivas med just parametriseringen ovan är svårare eftersom vi har en xy-term. Istället för att försöka skriva om ekvationen på formen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

där a och b är ellipsens x-radie respektive y-radie, behöver man skriva om ekvationen på den mer generella formen

$$\left(\frac{x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)}{a}\right)^2 + \left(\frac{x\sin(\alpha) - y\cos(\alpha)}{b}\right)^2 = 1$$

där α är vinkeln med vilken ellipsen är roterad (i det här fallet $45°$).

I vilket fall som helst, inför envariabelfunktionen

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x(t), y(t)) \\ &= f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t), \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t) - \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t)\right) \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(t) - \frac{3}{\sqrt{2}}\cos(t)\right)^2 \end{aligned}$$

Nu återstår bara att derivera och finna stationära punkter på ellipsen, dvs. ställen t där $g'(t) = 0$. Själva avståndet ges sedan av $\sqrt{g(t)}$.

2.4 Alternativ 4

"Gymnasiemattelösningen" är att helt enkelt lösa ut y (eller x) ur ellipsens ekvation

$$13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$$

m.h.a. PQ-formeln eller liknande. Vi får

$$y = \pm\frac{1}{13}\left(6\sqrt{26 - 4x^2} - 5x\right)$$

Inför nu envariabelfunktionen

$$g(x) = f(x, y) = f\left(x, \pm\frac{1}{13}\left(6\sqrt{26 - 4x^2} - 5x\right)\right)$$

och finn extremvärden till $g(x)$ genom att lösa ekvationen $g'(x) = 0$.