



EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 3:  
Stabilitet, rotort och Nyquistkriteriet

# Innehåll

- Laplacetransform (repetition, slides)
  - Överföringsfunktion, poler och nollställen
  - Stegsvvar
  - Återkopplat system = slutet system
- Rotort (tavlan)
- Nyquistkriteriet (tavlan)

# Laplace transform

- Laplace transform of diff. equation (assume beg. values = 0)

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = b_0\dot{u}(t) + b_1u(t)$$

⇓  $\mathcal{L}$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 Y(s) = b_0 s U(s) + b_1 U(s)$$

⇓

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{G(s)} U(s)$$

- $G(s)$  = *överföringsfunktion*
- Roots of denominator = *poler* (determine stability, compare with characteristic equation of diff. equation)
- Roots of numerator = *nollställen* (affect speed)

Stegsvar:  $y(t)$  då  $u(t)=1, t \geq 0 \Leftrightarrow U(s)=1/s$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} \frac{1}{s}$$

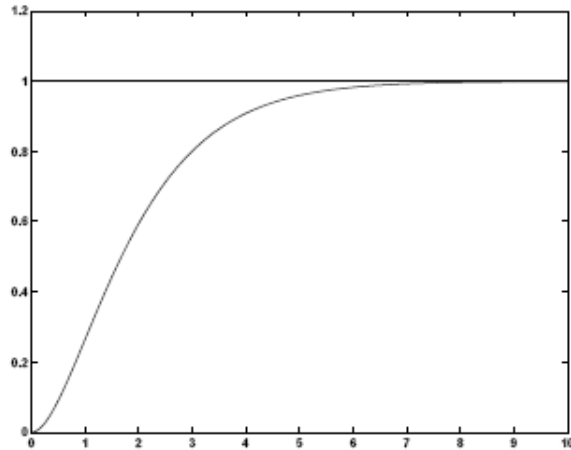
$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$  (*distinkta  $\lambda_i$* )

$$y(t) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

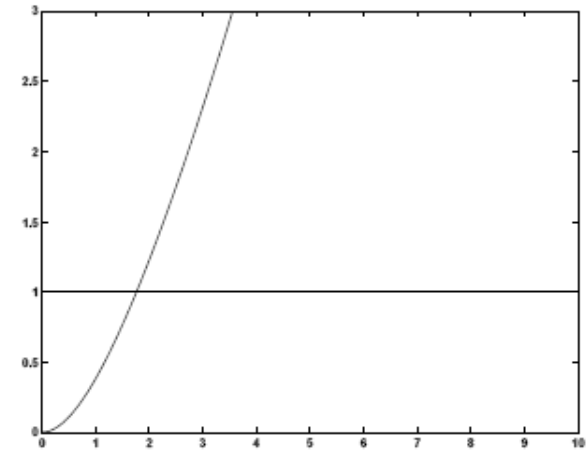
- Asymptotiskt stabilt om, och endast om, alla  $\text{Re } \lambda_i < 0$
- Stora  $|\lambda_i|$  ger snabbt stegsvar
- Komplexa poler ger svängningar, ökar med  $\text{Im } \lambda_i / \text{Re } \lambda_i$

# Stegsvarens principiella utseende

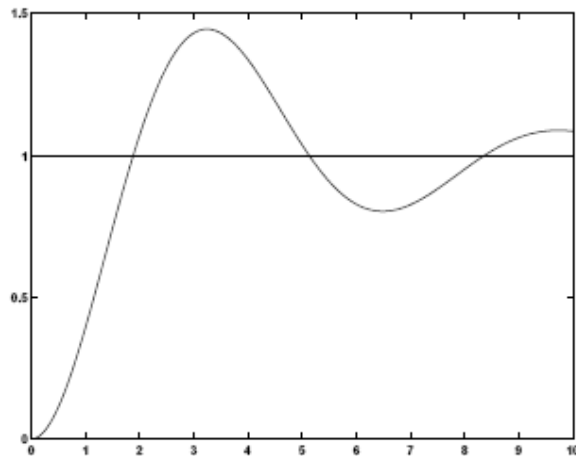
$\lambda$  reella och negativa:



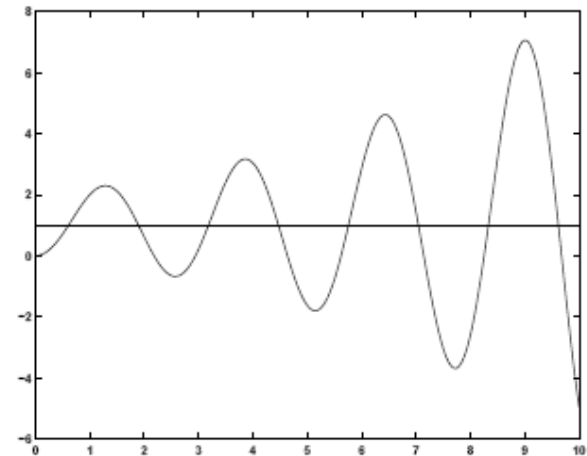
$\lambda$  reella och positiva:



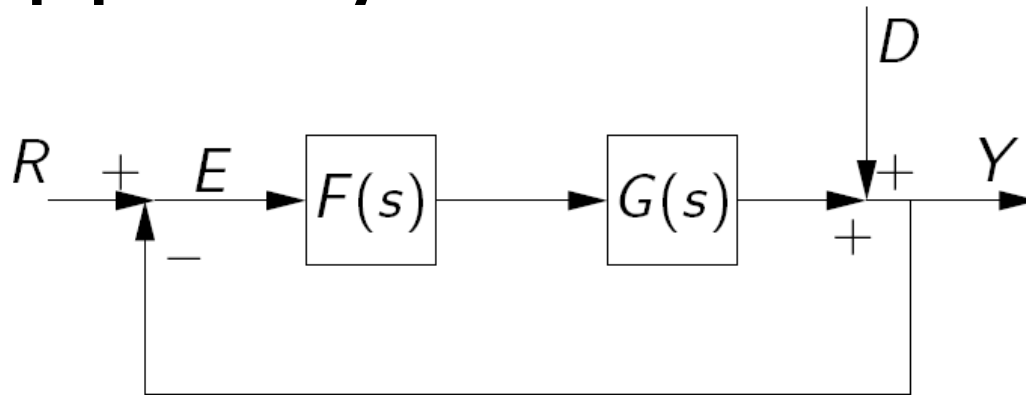
$\lambda$  komplexa och  $Re(\lambda) < 0$ :



$\lambda$  komplexa och  $Re(\lambda) > 0$ :



# Återkopplat system = Slutet system



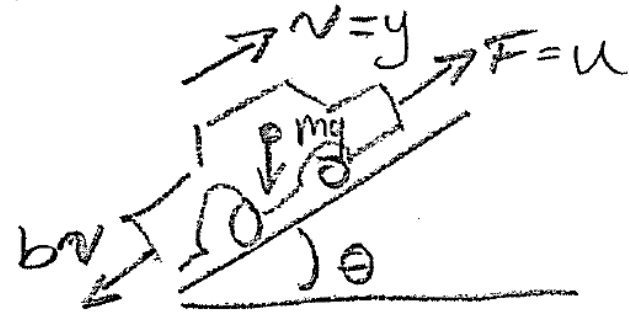
$G(s)$  - system,  $F(s)$  - regulator.

- Slutna systemets överföringsfunktion:

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{\underbrace{1 + G(s)F(s)}_{G_c(s)}} R(s)$$

- Återkoppling med  $F(s)$  flyttar systemets poler!

# Farthållning av bil



- Bilmodell  $m = 1000$ ,  $b = 100$ ,  $\theta = 0$

$$\dot{y} = -0.1y(t) + 0.001u(t) \quad \Rightarrow^{\mathcal{L}} \quad Y(s) = \underbrace{\frac{0.001}{s + 0.1}}_{G(s)} U(s)$$

- PI-regulator

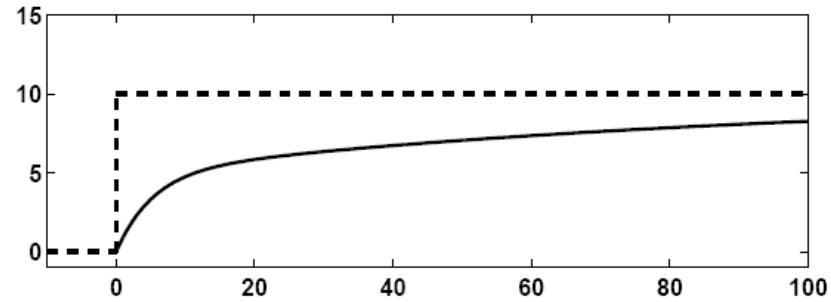
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \Rightarrow^{\mathcal{L}} \quad U(s) = \underbrace{\frac{K_P s + K_I}{s}}_{F(s)} E(s)$$

- ger, med  $K_P = 100$ , slutna systemet

$$Y(s) = \frac{0.1s + 0.001K_I}{s^2 + 0.2s + 0.001K_I} R(s)$$

# Simulering av farthållningssystem

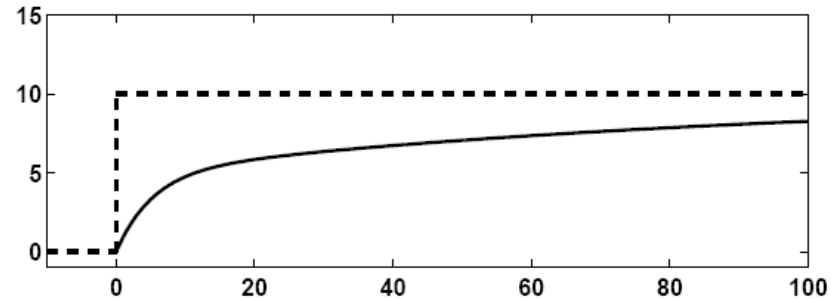
- $K_I = 2 \rightarrow$  poler:  $s = -0.01, s = -0.19$



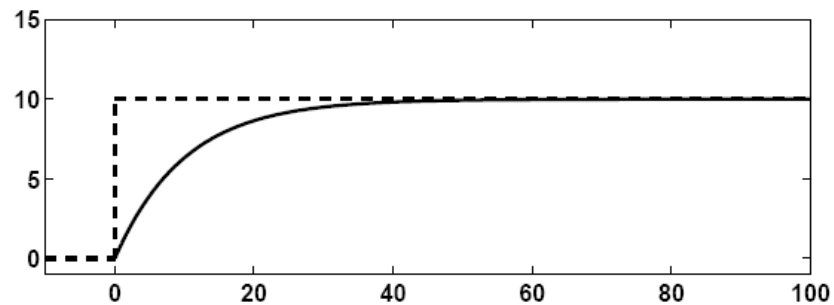


# Simulering av farthållningssystem

- $K_I = 2$  → poler:  $s = -0.01, s = -0.19$

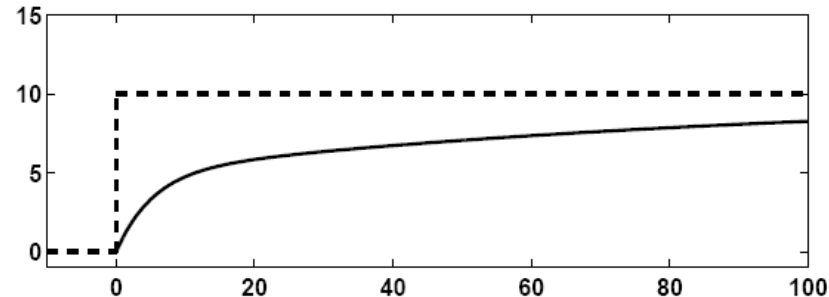


- $K_I = 10$  → poler:  $s = -0.1, s = -0.1$

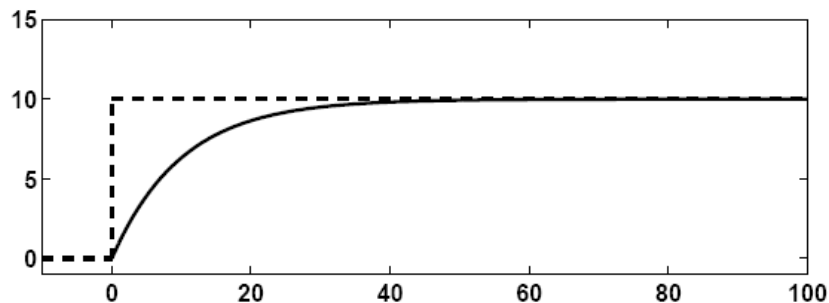


# Simulering av farthållningssystem

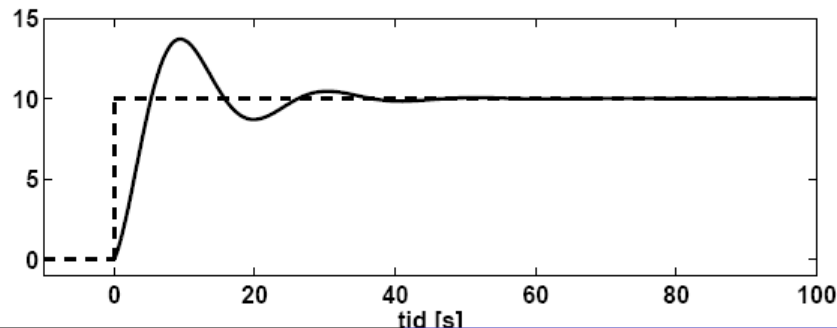
- $K_I = 2 \rightarrow$  poler:  $s = -0.01, s = -0.19$



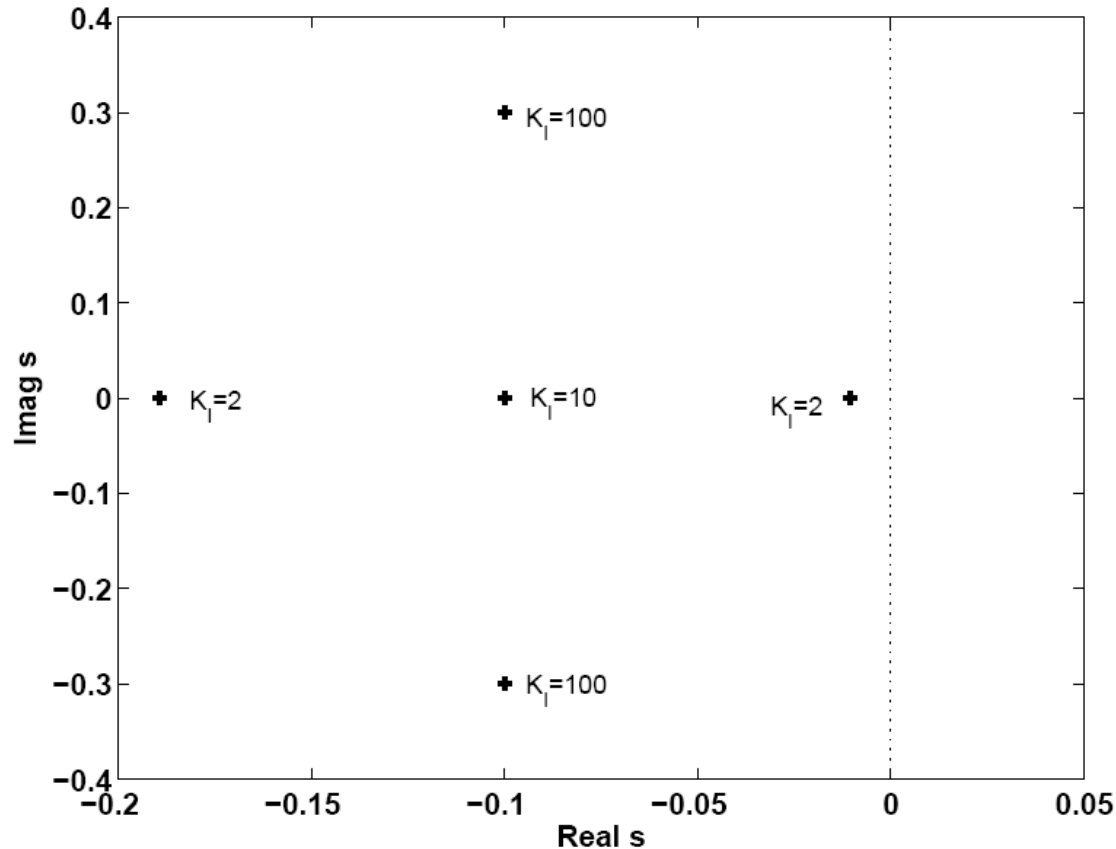
- $K_I = 10 \rightarrow$  poler:  $s = -0.1, s = -0.1$



- $K_I = 100 \rightarrow$  poler:  $s = -0.1 \pm i0.3$



# Polernas läge för olika $K_I$



- Hur flyttar sig polerna då  $K_I$  ändras?  $\Rightarrow$  **Rotort**
- För vilka  $K_I$  hamnar någon pol i komplexa högra halvplanet (HHP)?  $\Rightarrow$  **Nyquistkriteriet**

# Harry Nyquist (1889-1976)



- Född 1889 i Värmland. Emigrerade till USA 1907
- Arbetade för Bell Labs 1917-1954
- Fick IRE (numera IEEE) Medal of Honor för:

“fundamental contributions to a quantitative understanding of thermal noise, data transmission and *negative feedback*”