Tentamen IX1304 Matematik, Analys 2012-08-23

Lösningsförslag Del B

5.

Bestäm arean av det ändliga område, för $x > 0$,
som ligger

ovanför grafen för $f_1 = -6 - 5x + x^2$

ovanför grafen för $f_2 = -20 + x + x^2$

och

under grafen för $f_3 = 12 + x - x^2$.

Genom att studera skärningspunkterna mellan kurvorna finner vi att

f_1 är underfunktion för $0 < x < 7/3$

och

f_2 är underfunktion för $7/3 < x < 4$

Det ger då arean

$$\int_0^{\frac{7}{3}} (\mathrm{f3} - \mathrm{f1})\, dx + \int_{\frac{7}{3}}^{4} (\mathrm{f3} - \mathrm{f2})\, dx = \int_0^{\frac{7}{3}} \left(18 + 6x - 2x^2\right) dx + \int_{\frac{7}{3}}^{4} \left(32 - 2x^2\right) dx = 69$$

6.

Bestäm $\frac{d^2 f}{dx\,dy}$ om $f(x, y) = a^2 x y + a y^2 + x$.

Bestäm sedan y så att uttrycket

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d f}{d x} = 0$$

är sant för alla värden på a.

-

$\frac{d f}{d x} = a^2 y + 1$ och $\frac{d^2 f}{dx\,dy} = a^2$

då blir $\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d f}{d x} = a^2 - a^2 y - 1 = a^2(1 - y) - 1$

Då ger $\frac{d^2 f}{dx\,dy} - \frac{d f}{d x} = 0$ att $y = \frac{-1+a^2}{a^2}$

7.

Kurvan $y = \sqrt{4 - x^2}$ roterar kring y-axeln, så att en sluten kropp bildas. Bestäm volymen av denna kropp.

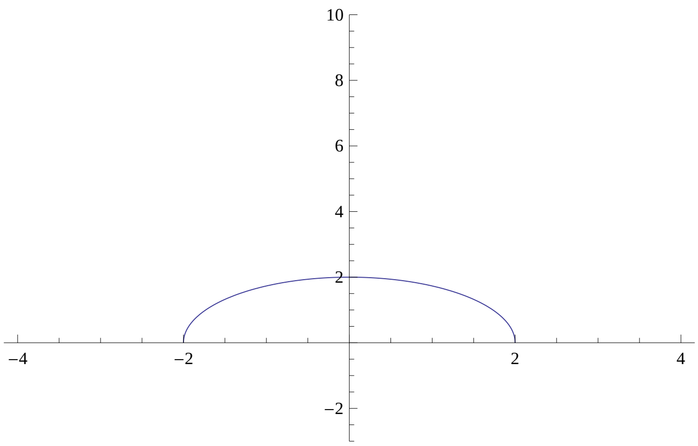
Rotationen sker kring y-axeln, alltså blir radien för det roterade området x
och
volymen av en skiva med höjden dy blir $\pi\, x^2$dy

x^2 kan kan lösas ut ur $y = \sqrt{4 - x^2}$ genom kvadrering:

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2$$

Totala volymen blir då

$$\pi \int_0^2 \left(4 - y^2\right) d y = \frac{16\pi}{3}$$



8.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

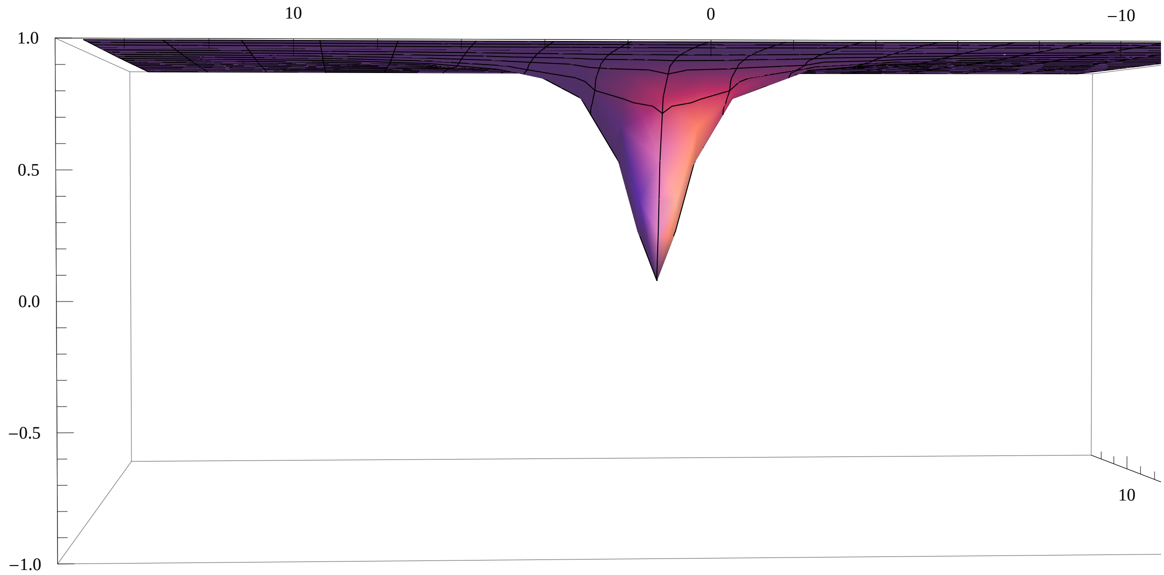
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Vi kan konstatera att uttrycket aldrig kan bli negativt, men kan anta värdet 0 när både xoch y är 0.

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2 + y^2} + 1} \to 1 \text{ då } x^2 + y^2 \to \infty$$

Alltså gäller att $0 \le f < 1$

■


10
0
−10
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
10