Tentamen IX1304 Matematik, Analys 2012-08-23

Lösningsförslag Del 1

1.

I en produktionsanläggning produceras x enheter av en viss produkt. Kostnaden för att producera dessa enheter är

$$c(x) = \frac{9x^2}{2} + 10x \text{ kr},$$

och intäkten för dessa blir

$$r(x) = 31x + \frac{13x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \text{ kr}.$$

Det gör att vinsten blir

$$v(x) = r(x) - c(x)$$

$$= 21x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$$

och att

$$v'(x) = 21 + 4x - x^2.$$

$v'(x) = 0$ ger då $x = -3$ och $x = 7$.

där $\boldsymbol{x = 7}$ ger maximal vinst

(vilket kan visas genom kurvstudie, resonemang eller med andraderivatan)

2.

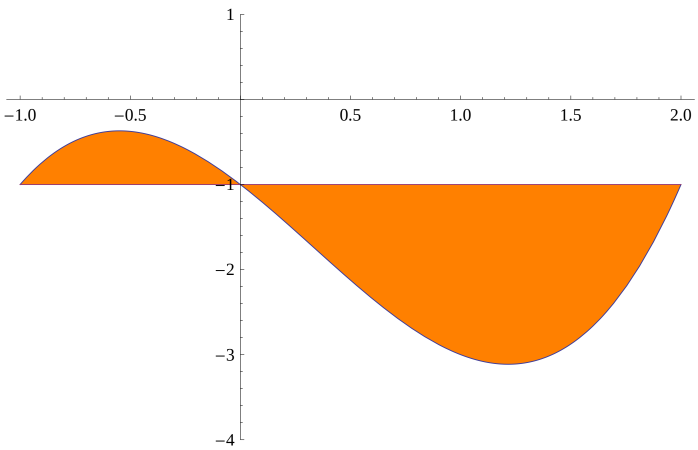
kurvan $g(x) = x^3 - x^2 - 2x - 1$

skär linjen $y(x) = -1$

för $x = -1$, 0 och 2

Vi får då två ändliga områden som vi söker arean av

Out[31]=



Vi får då två areor, i båda fallen genom att integrera överfunktion minus underfunktion, vilket ger:

$\int_{-1}^{0} (g(x) - (-1))\, dx = 5/12 \Rightarrow$

$$\int_{-1}^{0} \left(x^3 - x^2 - 2x - 1 - (-1)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x^2 - 2x\right) \text{dx} = \frac{5}{12}$$

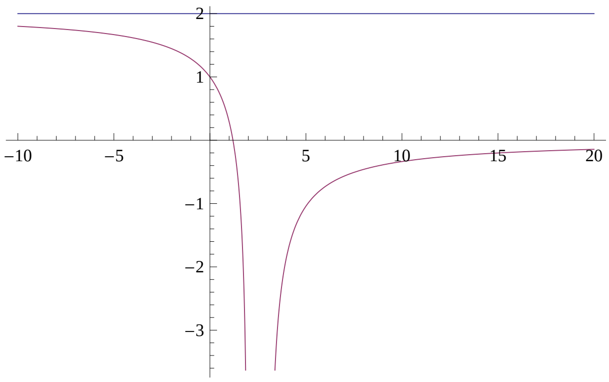
och på motsvarande sätt

$$\int_{0}^{2} \left(-1 - \left(x^3 - x^2 - 2x - 1\right)\right) dx = \int_{0}^{2} \left(2x + x^2 - x^3\right) dx = \frac{8}{3}$$

3.

Bestäm definitionsmängd och värdemängd för funktionen

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-5\,x+6}}$$



Uttrycket under rottecknet måste vara icke-negativ för att rotuttrycket skall vara definierat. Dessutom står det i nämnaren, alltså får det inte heller bli noll, vilket ger:

$$x^2 - 5\,x + 6 > 0 \;\Leftrightarrow x < 2 \,\|\, x > 3$$

För att hitta värdemängden undersöker vi vad som sker då $x \to \pm\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-5\,x+6}} = \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}} \to 1$$

då $x \to +\infty$ får vi alltså $f(x) \to 0$

och då $x \to -\infty$ får vi $f(x) \to 2$

Värdemängden blir då $f(x) < 2$

4.

Undersök om funktionen

$$f(x,\ y) = \sin x\ \cdot \cos y$$

kan ha lokala extremvärden i området

$$\{-4 < x < 4,\ \ -4 < y < 4\}.$$

Ange i så fall för vilka koordinater (x,y) detta är möjligt.

De båda förstaderivatorna blir

$\cos(x)\cos(y)$ och

$-\sin(x)\sin(y)$

I det angivna intervallet har

$\sin a$ nollställen för

$$a = 0 \text{ och } a = \pm\pi$$

och $\cos b$ för

$$b = \pm\frac{\pi}{2}$$

Det gör att alla kombinationer av dessa nollställer ger en möjlig extrempunkt.

■