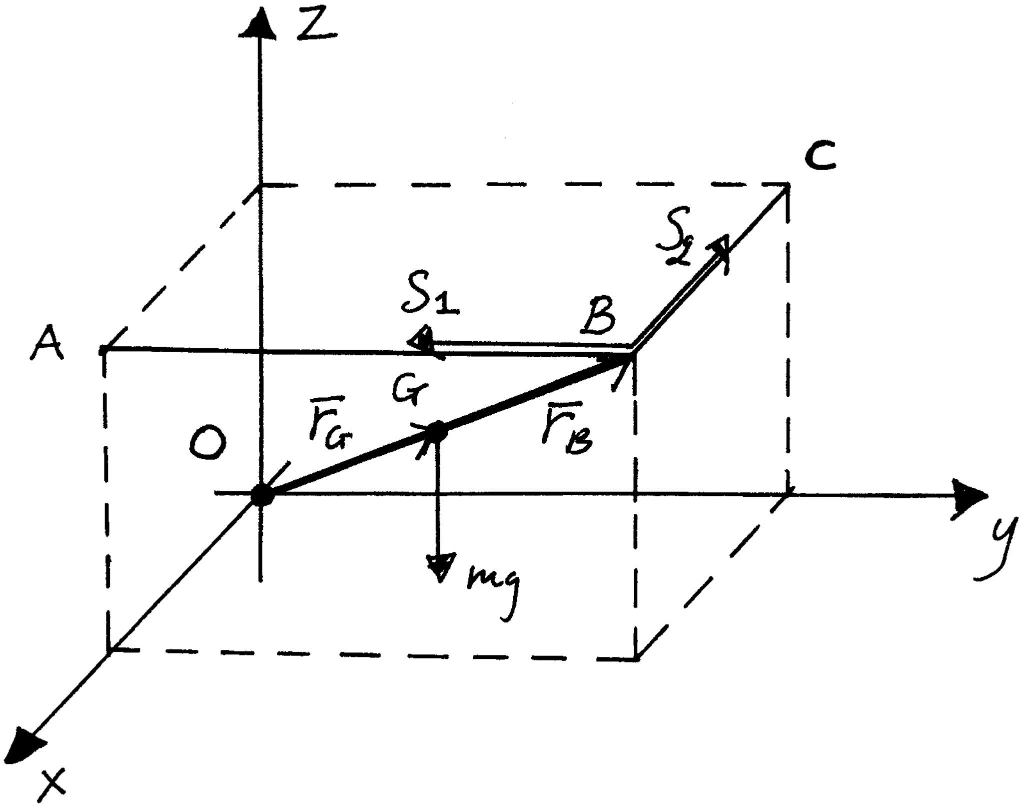
Lösningar till tentamen, SG1109, 29/5, 2012

1.



$$\mathbf{r}_B = (a, b, c)\,, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B\,, \quad \mathbf{S}_1 = -S_1\mathbf{e}_y\,, \quad \mathbf{S}_2 = -S_2\mathbf{e}_x\,. \tag{1}$$

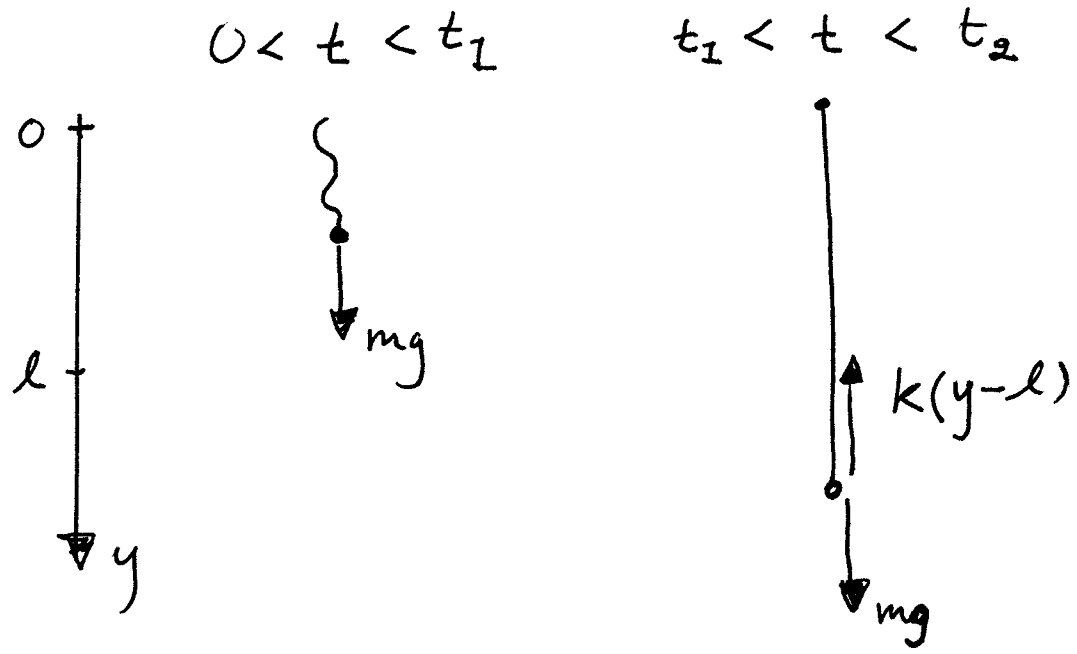
Jämvikt innebär att $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_G \times (-mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_B \times (-S_1\mathbf{e}_y - S_2\mathbf{e}_x) = \\ (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z) \times (-S_2\mathbf{e}_x - S_1\mathbf{e}_y - \frac{1}{2}mg\mathbf{e}_z) = \\ (cS_1 - \frac{1}{2}bmg)\mathbf{e}_x + (-cS_2 + \frac{1}{2}amg)\mathbf{e}_y + (bS_2 - aS_1)\mathbf{e}_z = \mathbf{0} \Rightarrow \end{aligned} \tag{2}$$

$$S_1 = \frac{bmg}{2c}\,, \tag{3}$$

$$S_2 = \frac{amg}{2c}\,. \tag{4}$$

2.



Under det första tidsintervallet gäller

$$m\ddot{y} = mg \Rightarrow \ddot{y} = g\,. \tag{5}$$

Om vi integrerar två gånger med begynnelsevillkoren $y = 0,\ \dot{y} = 0$ då $t = 0$, får vi

$$y = \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{6}$$

vilket ger läget y som funktion av tiden t då $0 < t < t_1$, där $t_1 = \sqrt{2l/g}$. Under det andra tidsintervallet gäller att

$$m\ddot{y} = -k(y-l) + mg \ \Rightarrow\ \ddot{y} + \omega_n^2 y = g + \omega_n^2 l\,, \tag{7}$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Lösningen kan skrivas som $y = y_p + y_h$, där

$$y_p = l + \frac{g}{\omega_n^2}\,, \tag{8}$$

$$y_h = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t)\,, \tag{9}$$

vilket ger

$$y = l + \frac{g}{\omega_n^2} + A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t)\,. \tag{10}$$

Konstanterna A och B bestäms nu från begynnelsevillkoren

$$y = l\,,\ \dot{y} = \sqrt{2gl}\ \text{ då }\ t = t_1 = \sqrt{2l/g}\,. \tag{11}$$

Vi får ekvationssystemet

$$l = l + \frac{g}{\omega_n^2} + A\sin(\omega_n t_1) + B\cos(\omega_n t_1) \tag{12}$$

$$\sqrt{2gl} = A\omega_n\cos(\omega_n t_1) - B\omega_n\sin(\omega_n t_1)\,. \tag{13}$$

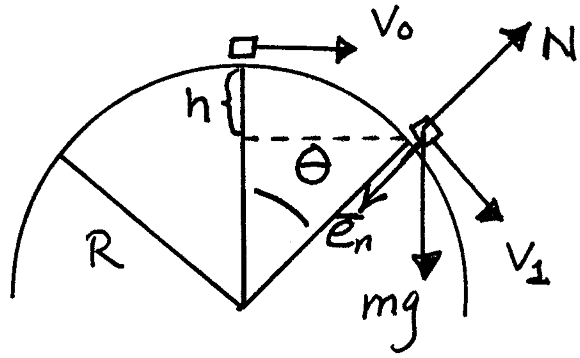
med lösningen

$$A = -\frac{g}{\omega_n^2}\sin(\omega_n t_1) + \frac{\sqrt{2gl}}{\omega_n}\cos(\omega_n t_1)\,, \tag{14}$$

$$B = -\frac{g}{\omega_n^2}\cos(\omega_n t_1) - \frac{\sqrt{2gl}}{\omega_n}\sin(\omega_n t_1)\,. \tag{15}$$

I tidsintervallet $t_1 < t < t_2$ ges alltså lösningen av (10) där A och B ges av (14) och (15).

3.



Energiprincipen ger att

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \;\Rightarrow\; v_1^2 = v_0^2 + 2gh \tag{16}$$

Ur figuren fås

$$h + R\cos\theta = R \;\Rightarrow\; h = R(1-\cos\theta)\,. \tag{17}$$

Om vi sätter in (17) i (16) så får vi

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)\,. \tag{18}$$

Newtons andra lag tillämpad i $\mathbf{e}_n$-led ger

$$m\frac{v_1^2}{R} = mg\cos\theta - N \;\Rightarrow\; N = mg\cos\theta - m\frac{v_1^2}{R}\,. \tag{19}$$

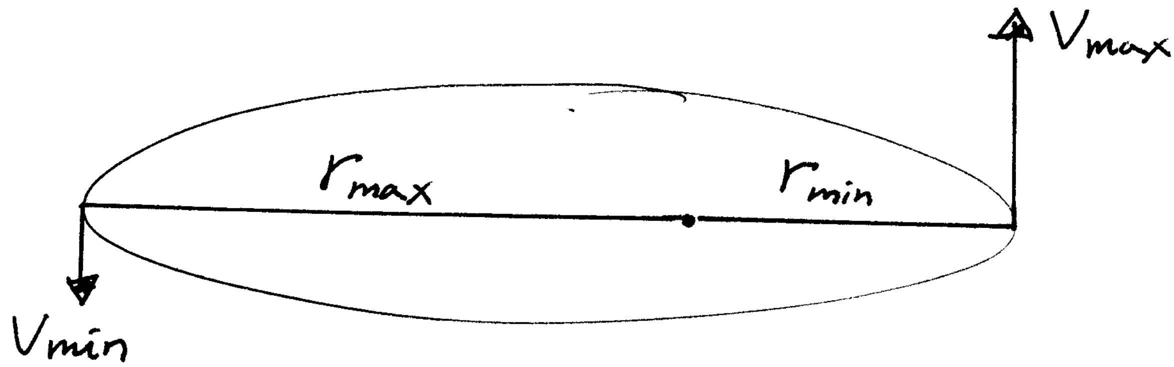
Ekvation (18) och (19) ger nu

$$N = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}\,. \tag{20}$$

Vagnen tappar kontakten med banan då N är noll. För vinkeln θ får vi då

$$\cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{gR} \;\Rightarrow\; \theta = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{gR}\right)\,. \tag{21}$$

4.



a) I centralrörelse gäller att

$$\dot{\theta} r^2 = h\,, \tag{22}$$

där h är en rörelsekonstant (dubbla sektorshastigheten). Alltså fås

$$\dot{\theta}_{max} = \frac{h}{r_{min}^2}\,, \tag{23}$$

$$\dot{\theta}_{min} = \frac{h}{r_{max}^2}\,. \tag{24}$$

Detta ger

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \left(\frac{\dot{\theta}_{max}}{\dot{\theta}_{min}}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,. \tag{25}$$

Ellipsens bana beskrivs av ekvationen

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\,, \tag{26}$$

vilket ger

$$r_{max} = r(\pi) = a(1+e)\,, \tag{27}$$

$$r_{min} = r(0) = a(1-e)\,. \tag{28}$$

Ekvation (25), (27) och (28) ger nu

$$\frac{1+e}{1-e} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; e(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 \;\Rightarrow\; e = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\,. \tag{29}$$

b) Enligt figuren fås

$$v_{max} = \dot{\theta}_{max} r_{min} \tag{30}$$

$$v_{min} = \dot{\theta}_{min} r_{max} \,. \tag{31}$$

Alltså fås

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{v_{max}^2}{v_{min}^2} = \left(\frac{\dot{\theta}_{max} r_{min}}{\dot{\theta}_{min} r_{max}} \right)^2 = 2 \,, \tag{32}$$

där vi har använt (25).

c) Den potentiella energin kan skrivas

$$V = -G \frac{mM}{r} \,. \tag{33}$$

Alltså fås

$$V_{max} = -G \frac{mM}{r_{max}} \,, \tag{34}$$

$$V_{min} = -\frac{mM}{r_{min}} \,, \tag{35}$$

och

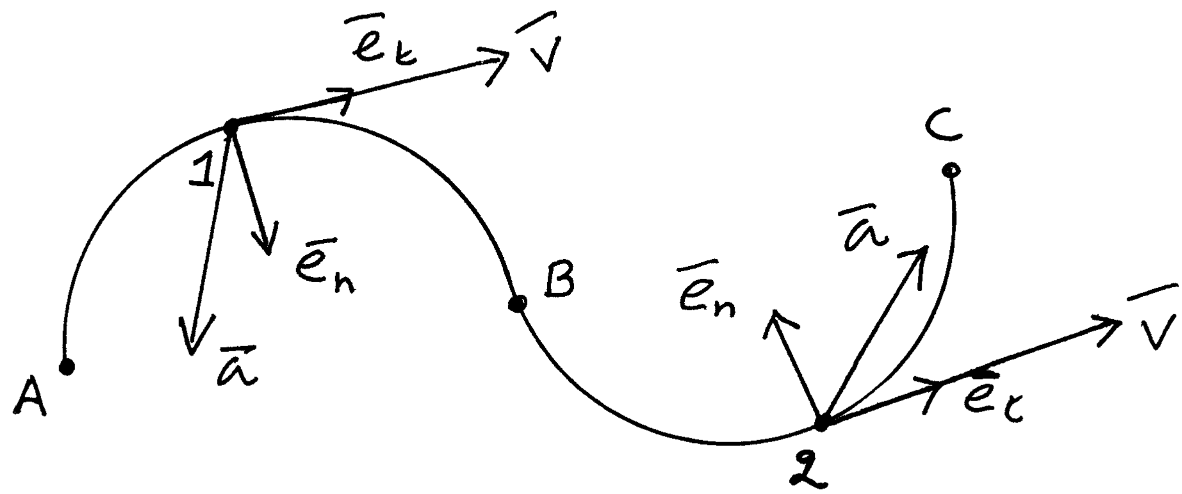
$$\frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \,. \tag{36}$$

där vi har använt (25).

Toeridel

1 a) Se sid. 33 i boken!
b) Se sid. 46 i boken!
c) Se sid. 47 i boken!

2 a) Se sid. 146-148 i boken!
b)



3a)
4a) Se sid. 328 i boken!
b) Se mina föreläsningsanteckningar som finns på KTH-Social!
c) Enligt Keplers tredje lag har vi $\tau = Ca^{3/2}$. Alltså fås att

$$\frac{r_x}{r_j} = \left(\frac{\tau_x}{\tau_j}\right)^{2/3}, \tag{37}$$

där r_x är planetens avstånd till solen, r_j jordens avstånd till solen och $\tau_j = 1$ år, jordens omloppstid.