KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Onsdagen den 8 december, 2010

Uppgift

(1) Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = a. \end{cases}$$

där a är en konstant.

(a) Använd Gausselimination för att överföra totalmatrisen för ekvationssystemet till trappstegsform[1] i fallet då $a = 6$. **(2)**

(b) Bestäm det värde på konstanten a för vilket systemet har lösning. **(1)**

(c) Ange tre olika lösningar till systemet för detta värde på a. **(1)**

(2) Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

är ett speciallfall av en typ av matriser som ofta förekommer i olika tillämpningar, exempelvis i samband med diskretisering av differentialekvationer för numerisk lösning. Använd rad- eller kolonnoperationer för att beräkna determinanten av matrisen A. **(4)**

(3) Betrakta de två linjerna i rummet, $\mathbb{R}^3$, som på parameterform beskrivs av

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t \cdot (1, -1, 1) \quad \text{och} \quad (x, y, z) = (1, 0, 1) + t \cdot (1, 0, -1).$$

(a) Bestäm med hjälp av kryssprodukten en vektor som är ortogonal mot bägge dessa linjer. **(1)**

(b) Kontrollera med hjälp av skalärprodukten att denna vektor verkligen är ortogonal mot bägge linjerna. **(1)**

[1] row-echelon form

(c) Bestäm en ekvation för ett plan som ligger mellan dessa linjer, dvs ett plan som är parallellt med bägge linjerna och sådant att de två linjerna ligger på olika sidor om planet. **(2)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

(1) (a) Om $a = 6$ blir totalmatrisen för systemet

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Vi ska använda Gausselimination för att överföra totalmatrisen till trappstegsform. Efter varje totalmatris nedan anges vilken eller vilka radoperationer som ska göras för att erhålla nästa totalmatris.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{newrow1 = oldrow1} \\ \text{newrow2 = oldrow2 + (-1)}\cdot\text{ oldrow1} \\ \text{newrow3 = oldrow3 + (-1)}\cdot\text{ oldrow1} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{newrow1 = oldrow1} \\ \text{newrow2 = } (1/2)\cdot\text{ oldrow2} \\ \text{newrow3 = oldrow3} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{newrow1 = oldrow1} \\ \text{newrow2 = oldrow2} \\ \text{newrow3 = oldrow3 + } 2\cdot\text{ oldrow2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Nu är totalmatrisen på trappstegsform. (Tredje raden i totalmatrisen svarar mot ekvationen $0 = 1$, så systemet saknar lösning.)

(b) Om man byter ut högerledet 6 mot högerledet a i den ursprungliga totalmatrisen ovan, samt genomför samma radoperationer som nyss, så erhålls totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right]$$

Tredje raden svarar mot ekvationen $0 = a - 5$, så systemet saknar lösning om $a \neq 5$, medan systemet har lösning(ar) om $a = 5$, t ex $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$.

(c) Om $a = 5$ blir sista totalmatrisen ovan $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Genom att addera andra raden till första raden erhålls den reducerade trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Den allmänna lösningen till systemet erhålls nu genom att sätta de bägge *fria* variablerna x_3 och x_4 till t resp s, och sedan uttrycka *bundna* variablerna x_1 och x_2 i t och s. Detta ger lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - 3t/2,\ -1 + s + t/2,\ s,\ t),$$

där s och t är godtyckliga tal.
Med exempelvis $(s,t) = (0,0)$, $(s,t) = (1,0)$ och $(s,t) = (0,2)$ erhålls de tre lösningarna

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -1,\ 0,\ 0),\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,\ 0,\ 1,\ 0) \text{ och } (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1,\ 0,\ 0,\ 2)$$

(2) Med hjälp av *elementära* radoperationer transformerar vi matrisen till en övertriangulär matris vars determinant sedan enkelt kan beräknas, eftersom determinanten av en triangulär matris är lika med produkten av dess diagonalelement.
I själva verket räcker det i detta exempel med upprepad användning av operationen “addera en multipel av en rad till en annan rad”, vilket som bekant inte ändrar determinantens värde.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 + \frac{1}{2} r_1 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \frac{2}{3} r_2 \\ r_4 \\ r_5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 + \frac{3}{4} r_3 \\ r_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 + \frac{4}{5} r_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 6.$$

(3) (a) Att vara ortogonal mot båda linjerna har bara med linjernas riktning att göra och vi kan därmed få fram en sådan vektor, $\mathbf{n}$, som kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, dvs

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (1,-1,1) \times (1,0,-1) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= ((-1)\cdot(-1) - 1\cdot 0, -1\cdot(-1) + 1\cdot 1, 1\cdot 0 - (-1)\cdot 1) = (1,2,1) \end{aligned}$$

(b) Vi kan nu kontrollera genom skalärprodukten att

$$(1,2,1)\cdot(1,-1,1) = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

och

$$(1,2,1)\cdot(1,0,-1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 1 + 0 - 1 = 0,$$

vilket visar att vektorn $\mathbf{n} = (1,2,1)$ är ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer som önskat.

(c) Ett plan som är parallellt med båda linjerna måste ha en normalvektor som är ortogonal mot båda linjerna. Vi har redan hittat en sådan vektor i $\mathbf{n} = (1,2,1)$. Om (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet kan planets ekvation skrivas som

$$\mathbf{n}\cdot(x - x_0, y - y_0, y - z_0) = 0,$$

eller

$$\mathbf{n}\cdot(x,y,z) = d,$$

där $d = \mathbf{n}\cdot(x_0,y_0,z_0)$. För olika värden på d ger detta plan som alla är parallella med båda linjerna.

Väljer vi en punkt på den ena linjen, exempelvis $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,0)$ får vi ekvationen $x + 2y + z = 3$ och väljer vi en punkt på den andra linjen, exempelvis $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,1)$ får vi ekvationen $x + 2y + z = 2$. Därmed kommer ekvationerna $x + 2y + z = d$, för d mellan 2 och 3, alla ge plan som ligger mellan de båda linjerna. Vi kan till exempel välja $d = 5/2$.

Svar:

(1) (a) Då $a = 6$ är trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(b) Det finns lösning bara om $a = 5$.

(c) $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2,-1,\,0,\,0)$, $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2,\,0,\,1,\,0)$, $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-1,\,0,\,0,\,2)$ är tre exempel på lösningar till systemet när $a = 5$.

(2) $\det(A) = 6$.

(3) (a) Vektorn $\mathbf{v} = (1,2,1)$ är vinkelrät mot båda linjerna.

(c) Planet med ekvation $x + 2y + z = 5/2$ ligger mellan linjerna.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag om de inte väsentligt ändrar uppgiftens karaktär.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. Bristande motivering markeras med *FLFT* — *för lite förklarande text* — och obefintlig motivering markeras med *FTS* — *förklarande text saknas*.

(1) (a)
- Korrekt påbörjad Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd Gauss-Jordanelimination, **1 poäng**.

(b) Korrekt motiverad slutsats om att $a = 5$ är det enda värde är det finns lösning, **1 poäng**.

(c) Tre korrekt motiverade lösningar till systemet, **1 poäng**.

(2)
- Korrekt hänvisning till hur rad- och kolonnoperationer påverkar determinanten, **1 poäng**
- En korrekt utförd rad- eller kolonnoperation, **1 poäng**
- Korrekt slutförd sekvens av rad- eller kolonnoperationer, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av determinanten, exempelvis med triangulär matris, **1 poäng**

(3) (a) Korrekt beräkning kryssprodukten av riktningsvektorerna, **1 poäng**.

(b) Korrekt kontroll med hjälp av skalärprodukten, **1 poäng**.

(c)
- Korrekt ekvation för plan som är parallella med båda linjerna, **1 poäng**.
- Korrekt konstantterm som ger plan mellan linjerna, **1 poäng**.