KTH Matematik

Tentamen del 2
SF1524, 2019-06-05, kl 8.00-11.00,
Grundläggande numeriska metoder och programmering

Del 2, Max 50p.
Rättas endast om del 1 är godkänd.
Betygsgränser: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.
Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. För $a > 0$ och $0 < b < a$ ska man beräkna roten av

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{4}\frac{b^2}{a}$$

För att lösa problemet har vi följande två fixpunktsiterationer givna

$$\text{i)} \qquad x_{n+1} = (1 + \frac{b}{2a})x_n + x_n^2$$
$$\text{ii)} \qquad x_{n+1} = -\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}x_n.$$

(4 p) **(a)** För de två fallen ovan, visa att $x = -\frac{b}{2a}$ är en fixpunkt och den enda roten till $f(x)$.

(4 p) **(b)** Givet en startgissning x_0, avgör om iterationerna ovan konvergerar mot $-\frac{b}{2a}$ för alla värden på x_0, endast för vissa värden på x_0 (ange i sådant fall vilka) eller inte för några värden på x_0.

(3 p) **(c)** Formulera Newtons metod för problemet. Vilken konvergensordning förväntar du dig?

P2. Vi vill beräkna $y(t)$ som uppfyller den ordinära differentialekvationen

$$y''' + (1-2t)y' - 3\sin(2\pi t)y - 4t^2 = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

(3 p) **(a)** Inför lämpliga beteckningar och skriv ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Glöm inte begynnelsevillkoren!

(3 p) **(b)** Vad blir approximationen av $y'(0.5)$ med Framåt Euler (explicit Euler) och steglängden 0.5?

(8 p) **(c)** Skriv en detaljerad algoritm i MATLAB som beräknar $y(t)$ fram till $t = 5$ och plottar $y(t)$. Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler (explicit Euler).

P3. Beskriv vilka metoder och hur dessa bör användas för att lösa följande problem numeriskt. Det betyder att du ska namnge metoderna, beskriva metoderna och förklara hur du använder dem. Du ska inte lösa problemen, bara beskriva hur det kan göras.

(4 p) **(a)** För

$$B(s) = \frac{2 + \cos(2\pi s)}{1 + s^2}$$

bestäm en funktion $y(x)$ med $y(-10) = 0$ så att

$$y(x) = \int_{-10}^{x} B(\, y(s)\,)\, ds.$$

(4 p) **(b)** Låt

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2\pi x^2 - x + \cos^2(\pi x)}{1 + x^2 + \sin(x)}.$$

Bestäm a sådant att

$$\int_0^{f(a)} f(x)\, dx = 5.$$

P4. Vi önskar lösa ekvationen

$$\frac{x^2}{\cos x} - 2x^3 = 3$$

med Newtons metod.

(7 p) **(a)** Kan startpunkten $x_0 = 0$ ge konvergens till en lösning av ekvationssystemet? Motivera ditt svar.

(10 p) **(b)** Skriv ett Matlab-program som använder startpunkten $x_0 = -1$ och bestämmer en lösning till ekvationssystemet med ett fel mindre än 10^{-8} i x.