Tekniskt basår

Matematik I

Kursbunt VT 2020

Campus Flemingsberg

Ma I del A

2019-12-17

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

3 MER OM VEKTORER[1]

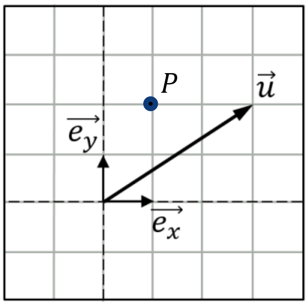
Basvektorer

En vektor kan alltid delas upp i komposanter längs två givna riktningar. Dessa riktningar ges i planet av två vektorer, $\overrightarrow{e_x}$ och $\overrightarrow{e_y}$, dvs. i x- respektive y-riktning. Om de väljs så att de inte är parallella sägs vektorparet vara *basvektorer*, de utgör en bas. Om de dessutom är vinkelräta och har längden *ett* utgör de en så kallad ON-bas, ett ON-system.

ON-system

ON betyder *ortonormal*, *orto* från *ortogonal* (vinkelrät) och normerat därför att basvektorerna har längden ett.

Varje vektor kan alltid skrivas som en summa av $\overrightarrow{e_x}$ och $\overrightarrow{e_y}$. I figuren nedan blir $\vec{u} = 3\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y}$ eller om man underförstår basvektorerna, $\vec{u} = (3, 2)$. Man säger att vektorn $\vec{u}$ har koordinaterna $(3, 2)$. Komposanterna till vektor $\vec{u}$ är $3\overrightarrow{e_x}$ och $2\overrightarrow{e_y}$.
Tyvärr används samma beteckning för en punkt. I figuren nedan gäller att vektorn $\vec{u} = (3, 2)$ och punkten $P = (1,2)$. Om inga missförstånd kan ske, använd detta beteckningssätt, annars bör du skriva $\vec{u} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$



Parallella vektorer

Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella om och endast om $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, där k är en konstant.

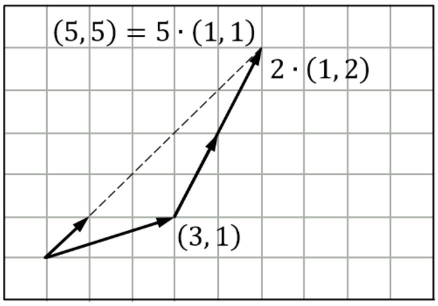
Exempel 1

Bestäm det reella talet t så att vektor $\vec{u} = (3, 1) + t(1, 2)$ blir parallell med vektor $(1, 1)$.

Lösning:

$(3, 1) + t(1, 2) = (3 + t, 1 + 2t)$ ska vara parallell med $(1, 1)$. Det ska alltså finnas ett tal k, sådant att

$k(1, 1) = (3 + t, 1 + 2t)$



Denna vektorekvation ger upphov till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 3 + t = k \\ 1 + 2t = k \end{cases}$$

som har lösningen

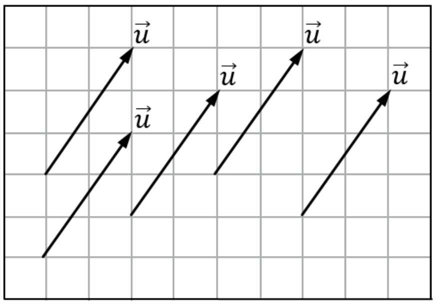
[1] Sid 2-5 något omarbetat från: L. A. Callenberg (2006), *Matematik Breddning*, Studentlitteratur AB, ISBN 91-44-04635-9

$$\begin{cases} t = 2 \\ k = 5 \end{cases}$$

Det reella talet $t = 2$ gör att
$(3,1) + t(1,2) = (3,1) + 2(1,2) = (3,1) + (2,4) = (5,5)$
vilket är parallell med $(1,1)$.

Ekvivalens-klass

Två vektorer sägs vara ekvivalenta om de är lika långa och har samma riktning. Man kan också säga att de tillhör samma ekvivalensklass.

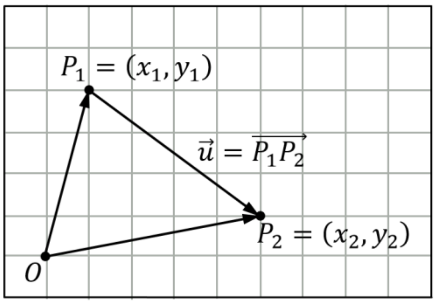


Vektorer ur samma ekvivalensklass.

Ortvektor

Om en *vektor* i ekvivalensklassen har sin början i origo, så har denna vektor samma koordinater som den *punkt* där vektorn slutar, och kallas *ortsvektor*.

Om man i sitt koordinatsystem ritar in en vektor med start i punkten P_1 och slut i punkten P_2 kan man kalla denna vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ blir $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ om $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$, dvs. **slutpunktens** koordinater **minus startpunktens** koordinater.



I figuren inses även att
$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

Exempel 2

Punkterna P_1och P_2 har koordinaterna $(3,4)$ respektive $(5,3)$. Bestäm koordinaterna för vektorerna $\overrightarrow{OP_1}$ $\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{P_2P_1}$.

Lösning

$\overrightarrow{OP_1}$ är vektorn som går mellan origo och punkten P1 och vektorns koordinater är naturligtvis (3,4)
$\overrightarrow{P_1P_2} = (5-3, 3-4) = (2,-1)$
$\overrightarrow{P_2P_1} = (3-5, 4-3) = (-2,1)$

Exempel 3 Punkterna Q_1och Q_2 har koordinaterna $(1, 1)$ respektive $(3, 0)$.

a) Skriv vektorerna $\overrightarrow{OQ_1}$ och $\overrightarrow{OQ_2}$ med hjälp av basvektorerna $\overrightarrow{e_x}$ och $\overrightarrow{e_y}$

b) Skriv även vektorn $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ med hjälp av basvektorerna $\overrightarrow{e_x}$ och $\overrightarrow{e_y}$.
Bestäm även koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{Q_1Q_2}$.

b) Vektorn $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ är ekvivalent med av vektorerna i Exempel 2.
Vilken och Varför?

d) Ortsvektorn i denna ekvivalensklass startar i origo och slutar i en punkt.
Vilken punkt?

e) En annan vektor i denna ekvivalensklass slutar i punkten R_2 som har koordinaterna (-3, -2). Vad är koordinaterna för startpunkten R_1?

Lösning

a) $\overrightarrow{OQ_1} = 1\overrightarrow{e_x} + 1\overrightarrow{e_y}$ och $\overrightarrow{OQ_2} = 3\overrightarrow{e_x}$

b) $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1} = 3\overrightarrow{e_x} - \left(1\overrightarrow{e_x} + 1\overrightarrow{e_y}\right) = 2\overrightarrow{e_x} - 1\overrightarrow{e_y} = (2, -1)$
Svar: $\overrightarrow{Q_1Q_2} = 2\overrightarrow{e_x} - 1\overrightarrow{e_y} = (2, -1)$

c) $\overrightarrow{P_1P_2}$ har samma längd och riktning som $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ eftersom vektorernas koordinater är samma.
Svar: $\overrightarrow{P_1P_2}$

d) En vektor som börjar i origo och slutar i punkten $(2, -1)$ har samma längd och riktning som $\overrightarrow{Q_1Q_2}$
Svar: $(2, -1)$

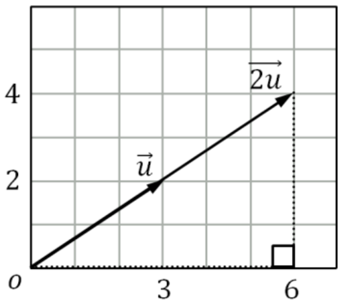
e) Vi söker koordinaterna till vektorn $\overrightarrow{OR_1} = \left(R_{1x}, R_{1y}\right)$.
Vi löser därför ekvationen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_2} - \overrightarrow{OR_1} &= (2, -1)\\ (-3, -2) - \left(R_{1x}, R_{1y}\right) &= (2, -1)\\ \left(R_{1x}, R_{1y}\right) &= (-3, -2) - (2, -1)\\ \left(R_{1x}, R_{1y}\right) &= (-5, -1)\end{aligned}$$

Ortsvektorn $\overrightarrow{OR_1}$ börjar i origo och lutar i punkten *R1*
Svar: Punkten *R1* har koordinaterna (-5, -1).

Vektorlängd I många tillämpningar är det viktigt att kunna be*räkna* en vektors längd. Om man har angett vektors koordinater i ON-bas blir detta väldigt enkelt. Längden av en vektor kallas ofta också för beloppet. Längden av vektorn $\vec{u}$, eller beloppet, skrivs $|\vec{u}|$. Längden av en vektor är ett reellt tal kopplat till vektorn.

Exempel 4 I en ON-bas är $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ om koordinaterna för $\vec{u}$ är (x, y).
Vektor $\vec{u} = (3, 2)$ är given. Beräkna $\left|\overrightarrow{2u}\right|$.



$\overrightarrow{2u} = 2(3, 2) = (6, 4)$
$\left|\overrightarrow{2u}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}\ le$
Svar: $\sqrt{52}\ le$

301. Låt $\vec{u} = (1, 4)$ och $\vec{v} = (2, -2)$. Beräkna i koordinatform
a) $3\vec{u}$
b) $\vec{u} - 2\vec{v}$
c) $-\vec{u} + 3\vec{v}$
d) $\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

302. Rita vektorn $\vec{u} = (6, -2)$ samt skriv den med hjälp av basvektorerna $\overrightarrow{e_x}$ och $\overrightarrow{e_y}$

303. Vektorn $\vec{u} = (-2, 5)$ och $\vec{v} = (1, 4)$ är givna. Beräkna
a) $|\vec{u}|$
b) $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$

304. Vektorerna $\vec{u} = (0, 4)$ och $\vec{v} = (-4, 3)$ är givna. Beräkna
a) $3|\vec{v}|$
b) $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$
c) $|\vec{u}| + |\vec{v}|$
d) $|\vec{u} + \vec{v}|$

305. I ett koordinatsystem är en triangel ritad. Hörnen är placerade i punkterna $P = (1, 2)$, $Q = (4, 0)$ och $R = (-1, -1)$. Ange koordinaterna för vektorerna
a) $\overrightarrow{PQ}$
b) $\overrightarrow{QR}$
c) $\overrightarrow{RP}$
d) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$

306. Bestäm vektorn $\vec{w}$ så att den blir motsatt riktad och tre gånger så lång som vektorn $\vec{u} = (6, -2)$.

307. Visa att punkterna $A = (1, 0)$, $B = (4, -2)$ och $C = (6, -10/3)$ ligger på en rät linje genom att beräkna koordinaterna för vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{BC}$.

308. Bestäm y så att de tre punkterna $(-1, 2)$, $(0, 4)$ och $(3, y)$ ligger på en rät linje.

309. Vektorn $\vec{u} = (7, 4)$, och $\vec{v} = (-2, 1)$ är givna. Bestäm talet t så att vektorn $\vec{u} + t\vec{v}$ blir parallell med vektorn $\vec{w} = (1, 2)$

310. Låt $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-2, 4)$ och $\vec{w} = (-5, 7)$. Bestäm de reella talen s och t så att vektorn $s\vec{u} + t\vec{v}$ får samma riktning som $\vec{w}$ samt blir dubbelt så lång.

4 ABSOLUTBELOPP

Definition

$|x|$

Absolutbeloppet av ett reellt tal x definieras av

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x < 0 \end{cases}$$

Funktionen ger alltid positiva värden: $|x| \geq 0$ för alla x.

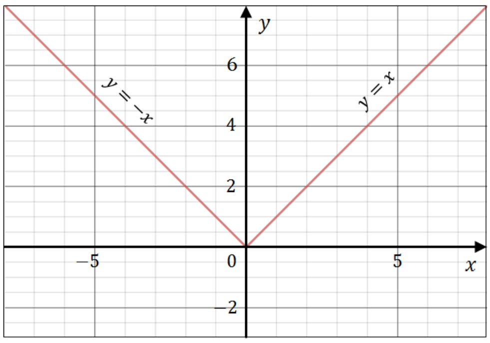
Tolkning

Geometriskt kan $|x|$ tolkas som avståndet till origo (avståndet mellan talet x och talet 0 på tallinjen).

$|5| = 5$, ty $5 \geq 0$. Avståndet mellan talet 5 och origo är 5.

$|-3| = -(-3) = 3$, ty $-3 < 0$. Avståndet mellan talet -3 och origo är 3.

Graf $|x|$



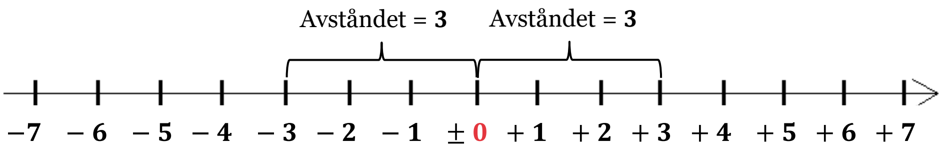
Figuren visar grafen till $f(x) = |x|$

Exempel 1

Lös ekvationen $|x| = 3$

Lösning Geo

Både talet 3 och talet -3 befinner sig på avståndet 3 från origo.



Svar: $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$

Lösning Def

$$\begin{cases} \text{om } x < 0 \text{ blir ekvationen } -(x_1) = 3 \\ \text{om } x \geq 0 \text{ blir ekvationen } \quad x_2 = 3 \end{cases}$$

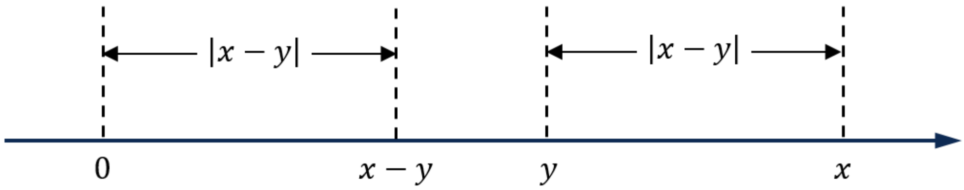
Svar: $x_1 = -3$ och $x_2 = 3$

Definition $|x - y|$

Av definitionen för $|x|$ följer att

$$|x-y| = \begin{cases} x - y & \text{om } x \geq y \\ -(x-y) = y - x & \text{om } x < y \end{cases} \quad \text{(I bilden nedan är } x > y\text{)}$$

Geometriskt kan $|x - y|$ tolkas som avståndet mellan punkterna x och y på tallinjen, eftersom detta avstånd är det samma som avståndet från punkten $x - y$ på tallinjen till 0.



Avståndet mellan talet x och talet y på tallinjen är oberoende av vilket av talen som är störst, ty $|x - y| = |y - x|$.

$|x - y|$ bygger vidare på, och utvidgar, den tidigare definitionen av $|x|$, t.ex. så är $|x| = |x - 0|$ avståndet mellan talet x och origo.

Exempel 2 Beräkna uttrycket $|\mathbf{5 - 9}|$

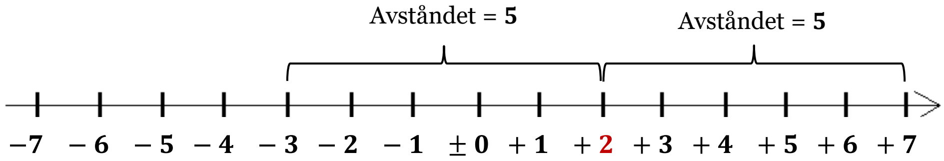
Lösning $|5 - 9| = |-4| = 4$ 4 är avståndet mellan 5 och 9.

Alt. lösning $|5 - 9| = -(5 - 9) = -5 + 9 = 4$

Exempel 3 Lös ekvationen $|x - 2| = 5$

Lösning Geo

Ekvationen $|x - 2| = 5$ tolkar vi som: ”Finn de tal x, sådana att avståndet till talet 2 är 5”.
Både talet $x_1 = -3$ och $x_2 = 7$ befinner sig på avståndet 5 ifrån talet 2.



Svar: $x_1 = -3$ och $x_2 = 7$

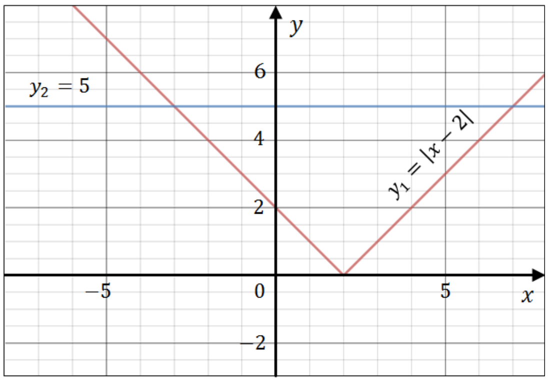
Lösning Def Vi förbereder genom att undersöka när absolutbeloppet blir noll d.v.s. när teckenväxlingen sker: $|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$.
Därefter delas lösningen upp i två fall i tabellen nedan. Absolutbeloppet tas bort med hjälp av definitionen.

x		2
Intervall:	$x < 2$	$2 \leq x$
Absolutbelopp:	$\lvert x-2\rvert = \; -(x-2)$	$\lvert x-2\rvert = \; (x-2)$
Ekvationen:	I detta intervall blir ekvationen: $-(x-2) = 5$ $-x+2 = 5$ $\underline{x = -3}$	I detta intervall blir ekvationen: $(x-2) = 5$ $\underline{x = 7}$

Svar: $x_1 = -3$ och $x_2 = 7$

Lösning Graf:
(Ej ok på tentamen)

Lösningen erhålles av skärningspunkterna mellan
$y_1 = |x-2|$ och
$y_2 = 5$
Se figuren till höger.
Svar: $x_1 = -3$ och $x_2 = 7$



Grafisk lösning till ekvationen $|x-2| = 5$

Ekvationer I ekvationslösningarna ovan används tre olika metoder.

Lösning Geo Om ekvationen är ”enkel” leder den geometriska tolkningen snabbt till lösningarna.

Lösning Def Om ekvationerna blir lite svårare behöver man skriva om ekvationen med hjälp av definitionen för absolutbelopp.

Lösning Graf En rent grafisk lösning kan vara bra för kontroll och förståelse.
OBS! Avläsning av skärningspunkter i graf är inte tillräcklig som motivering på Basårets tentor.

Exempel 4 Lös ekvationen $|x+4| = 2$

Lösning Geo Omskrivning: $|x-(-4)| = 2$
Finn de tal x, sådana att avståndet till talet -4 är 2.
Svar: $x_1 = -2$ och $x_2 = -6$.

Exempel 5 Lös ekvationen $|x + 11| = -6$

Lösning Geo Finn de tal x, sådana att avståndet till talet -11 är -6.
Svar: Lösning saknas eftersom inga avstånd, inga absolutbelopp, kan vara negativa.

Exempel 6 Beräkna $|3 - 2x| = 7$

Lösning Def Teckenväxlingen sker vid $|3 - 2x| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
Absolutbeloppen tas bort med hjälp definitionen i de två intervallen:

x		$^3/_2$
Intervall:	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x$
Absolutbelopp:	$\lvert 3 - 2x\rvert = (3 - 2x)$	$\lvert 3 - 2x\rvert = -(3 - 2x)$
Ekvationen:	$(3 - 2x) = 7$ $2x = -4$ $\underline{x = -2}$	$-(3 - 2x) = 7$ $2x = 10$ $\underline{x = 5}$

Svar: $x_1 = -2$ och $x_2 = 5$

(Kontroll $VL = |3 - 2 \cdot (-\mathbf{2})| = |3 + 4| = |7| = 7 = HL$
$VL = |3 - 2 \cdot \mathbf{5}| = |3 - 10| = |-7| = 7 = HL$)

Exempel 7 Lös ekvationen $|x + 3| + |2x - 4| = 19$

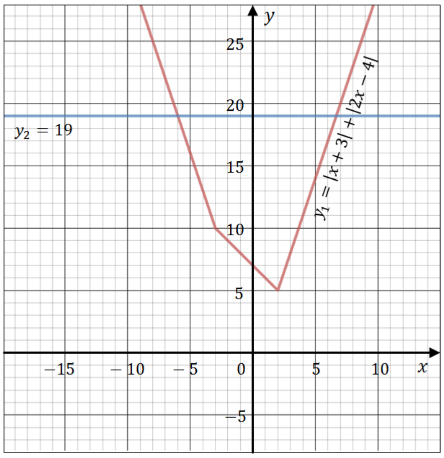
Lösning Def Teckenväxlingar sker vid
$|x + 3| = 0 \Rightarrow x = -3$
$|2x - 4| = 0 \Rightarrow x = 2.$
Absolutbeloppen tas bort med hjälp definitionen i de tre intervallen:

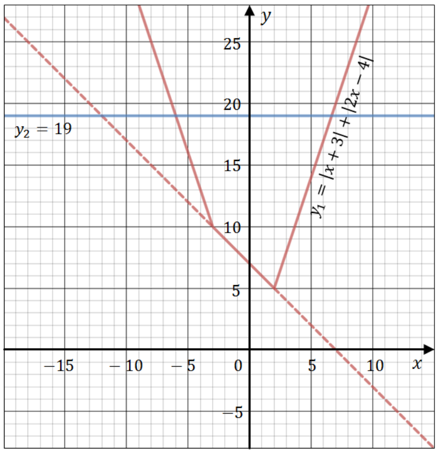
x	-3	2	
Intervall:	$x < -3$	$-3 \leq x < 2$	$2 \leq x$
Absolutbelopp:	$\lvert x + 3\rvert = -(x + 3)$ $\lvert 2x - 4\rvert = -(2x - 4)$	$\lvert x + 3\rvert = (x + 3)$ $\lvert 2x - 4\rvert = -(2x - 4)$	$\lvert x + 3\rvert = (x + 3)$ $\lvert 2x - 4\rvert = (2x - 4)$
Ekvationen:	$-(x + 3) - (2x - 4) = 19$ $-3x + 1 = 19$ $\underline{x = -6}$	$(x + 3) - (2x - 4) = 19$ $-x + 7 = 19$ $x = -12$ *Ej i intervallet!*	$(x + 3) + (2x - 4) = 19$ $3x - 1 = 19$ $\underline{x = \frac{20}{3}}$

Svar: $x_1 = -6, \;\; x_2 = \frac{20}{3}$

Lösning Graf (Ej ok på tentamen)

Jämför med den grafiska lösningen. I högra figuren syns den falska roten.





Vilket värde ska konstanten a ha för att ekvationen $|x+3| + |2x-4| = a$ ska ha exakt en lösning?

Sammanfattning av kapitlet

Som du märkt ovan så består arbetet för att algebraiskt lösa ekvationer som innehåller absolutbelopp av tre steg:

1. Skriva om ekvationerna så de inte längre innehåller absolutbelopp
2. Lösa de nya ekvationerna
3. Sammanfatta giltiga rötter

401. Beräkna genom att ta bort absolutbeloppets tecken.
  a) $|5-7|$
  b) $|7-5|$
  c) $|4-a|$
  d) $|2a-8|$
  e) $|5| + |-7|$
  f) $|5| - |-7|$
  g) $4 + |a|$
  h) $|-8| + |-a|$

402. Lösningen till ekvationen $|x-a| = b$ är $x_1 = -1$ och $x_2 = 7$. Bestäm konstanterna a och b.

403. Lös ekvationen
  a) $|x| = 1$
  b) $|x| = -1$
  c) $|x-2| = 0$
  d) $|x-2| = 1$
  e) $|x+4| - 7 = 0$
  f) $|5-x| + 3 = 0$

404. Lös ekvtionen
  a) $|2x+5| = 2$
  b) $|7x-7| = 7$
  c) $|6-3x| - 9 = 0$
  d) $4|2x-1| - 12 = 0$
  e) $3|4-3x| + 7 = 25$
  f) $|2(5-3x)| - 14 = 0$

405. Lös ekvationen
  a) $2|x| + x = 1$
  b) $|x+2| + x = 1$
  c) $|x-3| = 5 - 3x$
  d) $x + |x-3| = 5$
  e) $|3x+2| = 4x + 5$
  f) $5|2-3x| - 7 = 17x + 3$

406. Lös ekvationen
  a) $|x-3| = |5-x|$
  b) $|x-1| + |x+2| = 5$
  c) $|x-7| = |2x-2|$

6 AREA – OCH VOLYMSKALA[2]

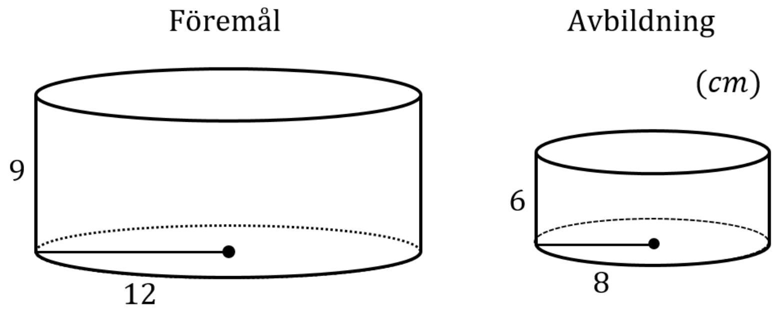
Kartor och ritningar är likformiga avbildningar av verkligheten (föremålet).

Exempel1 Om en karta har skalan (skalfaktorn) 1:20 000, så är

$$\frac{en\ sträcka\ på\ kartan}{motsvarande\ sträcka\ i\ verkligheten} = \frac{1}{20\ 000}$$

Exempel 2 Om en ritning är gjort i skalan 1:50, så är
$en\ sträcka\ i\ verkligheten = 50 \times motsvarande\ sträcka\ på\ ritningen$

Exempel 3



Den stora cylindern är en likformig avbildning (en förstoring) av den lilla cylindern.

Längdskala $Längdskalan = \frac{en\ längd\ i\ avbildningen}{motsvarande\ längd\ i\ föremålet} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Areaskala $Areaskalan = \frac{en\ area\ i\ avbildningen}{motsvarande\ area\ i\ föremålet} = \frac{\pi 8^2}{\pi 12^2} = \left(\frac{8}{12}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$Areaskala = (längdskala)^2$

Volymskala $Volymskalan = \frac{avbildningens\ volym}{föremålets\ volym} = \frac{\pi 8^2 \cdot 6}{\pi 12^2 \cdot 9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$Volymskala = (längdskala)^3$

Allmänt gäller för likformiga områden och kroppar

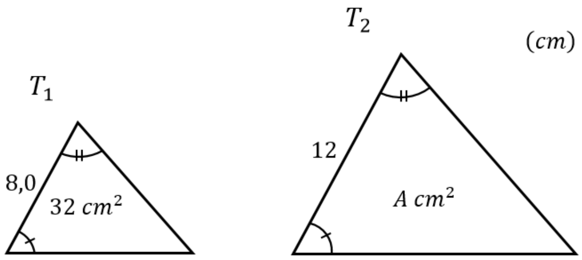
Samman-Fattning

Om längdskalan $= \frac{a}{b}$ så är areaskalan $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ och volymskalan $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

[2] Sid 11-14 något omarbetat från: L. Alfredsson, K. Bråting m.fl. (2012), *Matematik 5000 kurs 2c*, Natur & Kultur läromedel, ISBN 978-91-27-42253-7

Kartan ovan är avbildad i skala 1: 2 500 000

Exempel 1 Trianglarna T_1 och T_2 är likformiga.
T_2 är en avbildning av T_1.



Bestäm
a) längdskalan
b) areaskalan
c) arean A

Lösning:
a) $Längdskalan = {}^{12}/_{8} = {}^{3}/_{2}$
b) $Areaskalan = (längdskolan)^2 = \left({}^{3}/_{2}\right)^2 = {}^{9}/_{4}$
c) $Arean = 32 \cdot {}^{9}/_{4} = 72\ cm^2$

Exempel 2 Två vaser har samma form men olika storlek. Den större vasen är 15 cm hög och har volymen 1000 cm^3. Den mindre vasen är 9,0 cm hög. Beräkna den mindre vasens volym, $V\ cm^3$.

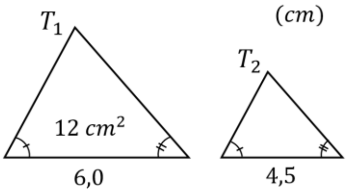
Lösning:
Den mindre vasen kan ses som en förminskad modell av den större, vilket ger
$Längdskalan = {}^{9}/_{15} = {}^{3}/_{5}$
$Volymskalan = {}^{V}/_{1000}$
${}^{V}/_{1000} = \left({}^{3}/_{5}\right)^3$

$V = 216\ cm^3 \approx 220\ cm^3$

Svar: Den mindre vasens volym är 220 cm^3.

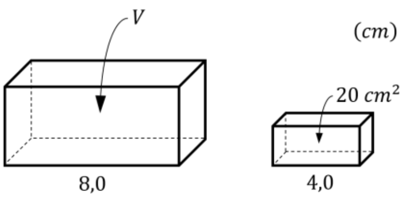
601. Av ett föremål med höjden 4 cm görs en kopia med höjden 1 cm. Ange
a) längdskalan
b) areaskalan
c) volymskalan.

602. Trianglarna har olika storlek men samma form. T_2 är en avbildning av T_1.



Bestäm
a) längdskalan
b) areaskalan
c) den mindre triangelns area.

603. Rätblocken är likformiga. Beräkna den okända volymen, V.



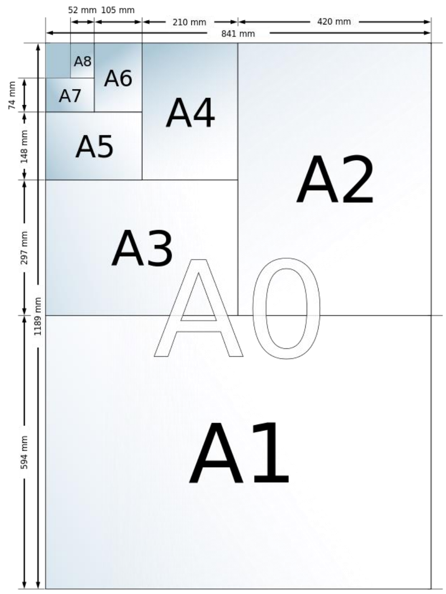
604. I den mindre av två likformiga trianglar är en sida 80 % av motsvarande sida i den större triangeln.
Vilket är förhållandet mellan den mindre och den större triangeln areor?

605. På en karta i skala 1:4 000 uppskattar Bella arean av ett naturreservat till 80 cm^2.
Hur många ha (hektar) är området i verkligheten?
$(1\ ha = 1 \cdot 10^4\ m^2)$

606. Vilken längdskala ger en fördubbling av

a) arean
b) volymen

607. A-formatet är de vanligaste pappersformaten i Europa.



Alla rektanglarna i A-serien är likformiga. $A0$ har arean $1{,}00\ m^2$. $A1$ har måtten $594\ mm \times 841\ mm$.

a) Den korta sidan på ett $A7$ är $74{,}0\ mm$. Vilket mått har långsidan?
b) Vilken area har $A2$?

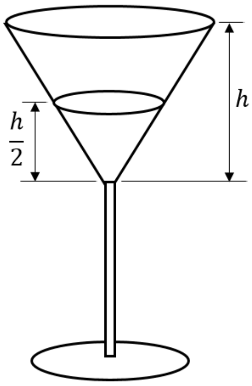
608. Hur många gånger större blir arean av en figur om alla längdmått i figuren blir

a) 2 ggr så långa
b) 3 ggr så långa
c) 4 ggr så långa?

609. Sverige är ca 157 mil långt och har en total area på 450 000 km^2.
Är det sant att en Sverigekarta i skala 1:1 000 000 får plats på ett A4-papper? Motivera ditt svar.

610. Till ett par jeans med byxlängden (innersömmen) 80 cm går det $A\ m^2$ tyg.
Med hur många procent bör tygåtgången öka, om man syr ett par jeans av samma modell men med en 10 % längre innersöm?

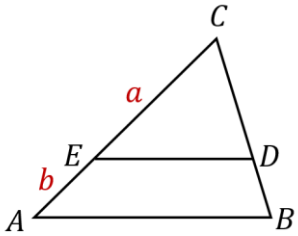
611. Ett koniskt glas rymmer 8,0 cl då det är fylld till bredden.



Hur många centiliter har man druckit då vätskans höjd sjunkit till hälften?

612. Ett rätblock med sidorna a, b och c avbildas med skalan s. Visa att
a) areaskalan är s^2
b) volymskalan är s^3.

613. Triangeln CDE har lika stor area som parallelltrapetsen $ABDE$.



Bestäm i exakt form kvoten b/a.

ÖVERKURS Mer om absolutbelopp och ekvationer

Lösningar till ekvationer

Vid lösning av ekvationer hittas ibland *inga* lösningar, *någon/några* lösningar eller *oändligt* många lösningar.

A. Lös ekvationen: $2x - 1 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}$ Svar: $x = \frac{3}{2}$
Utfall A: *en eller flera* lösningar finns.

Utfall A-D

B. Lös ekvationen: $2x + 3x = 3 + 5x \;\Leftrightarrow\; 0 = 3$ Svar: Lösning saknas
Utfall B: *ingen* lösning finns.

C. Lös ekvationen: $1 - x + 5 + x = 6 \;\Leftrightarrow\; 6 = 6$ Svar: Alla x-värden är OK
Utfall C: *oändligt* antal lösningar finns.

D. Lös ekvationen: $\frac{x^2-4}{x-2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4 = x - 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0$

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ (x_2 = 2 \quad \text{ej definierad}) \end{cases}$ Svar: $= -1$

Utfall D: *falska* lösningar finns.

Följande ***fyra*** utfall kan alltså förekomma

A. Finns lösningar i definitionsmängden $\Rightarrow$ OK
B. Orimligt resultat t.ex. $0 = 3$ $\Rightarrow$ Inga x ingår
C. Sant resultat t.ex. $6 = 6$ $\Rightarrow$ Alla x ingår
D. Lösning hittas, men inte i definitionsmängden $\Rightarrow$ Förkasta x

Samtliga utfall A-D kan förekomma i en och samma ekvation om den innehåller flera absolutbelopp (se Exempel 3).

Absolutbelopp Historik

Är absolutbelopp en helt ny funktion eller kan den uttryckas med funktioner du känner till sedan tidigare?

Studera funktionen $f(x) = \sqrt{x^2}$

$f(\mathbf{5}) = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$ $f(\mathbf{-3}) = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(\mathbf{-3})$

D.v.s. $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x < 0 \end{cases}$ Obs: $-x$ är ett positivt tal, om $x < 0$.

$\mathbf{\sqrt{x^2} = |x|}$ Detta visar att $|x|$ bara är ett nytt sätt att beteckna funktionen $\sqrt{x^2}$

Exempel 1 Lös ekvationen $\boldsymbol{x^2 = 9}$

Lösning Def $x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{om } x \geq 0 \\ -x = 3 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

Svar: $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$

Lösning Ma2 $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}$ Svar: $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$

Exempel 2 Förenkla uttrycket $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ $(x \neq 0)$ (Du frestas väl inte att svara 1?)

Lösning Def

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, \text{ om } x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, \text{ om } x < 0 \end{cases}$$

Detta är en trappstegsfunktion. Rita gärna upp den på räknaren.

Exempel 3 Avslutningsvis en riktigt <u>knepig</u> absolutbeloppsekvation som resulterar i samtliga fyra utfall A-D som beskrevs inledningsvis.

Lös ekvationen:

$$\big||x| - 2\big| + |x + 1| = 3$$

Lösning Def Vi undersöker när de tre absolutbeloppen blir noll d.v.s. när teckenväxlingarna sker

$|x| = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

$$\big||x| - 2\big| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \text{ om } x \geq 0 \\ -(x) - 2 = 0 \text{ om } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x = 2} \\ \underline{x = -2} \end{cases}$$

$|x + 1| = 0 \Rightarrow \underline{x = -1}$

Absolutbeloppen ersätts enligt definitionen i de fem intervallen:

x	-2	-1	0	2	
Intervall	$x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x$
Absolutbelopp $\lvert x\rvert$	$-(x)$	$-(x)$	$-(x)$	(x)	(x)
$\big\lvert\lvert x\rvert - 2\big\rvert$	$(-(x) - 2)$	$-(-(x) - 2)$	$-(-(x) - 2)$	$-((x) - 2)$	$((x) - 2)$
$\lvert x + 1\rvert$	$-(x + 1)$	$-(x + 1)$	$(x + 1)$	$(x + 1)$	$(x + 1)$
Ekvationen	$-x - 2 - x - 1 = 3$ $\underline{x = -3}$	$2 - x + x + 1 = 3$ $1 = 3$ *Lösningar saknas i intervallet!*	$x + 2 + x + 1 = 3$ $x = 0$ *Ej i intervallet!*	$2 - x + x + 1 = 3$ $3 = 3$ *<u>Alla x-värden i intervallet</u>*	$x - 2 + x + 1 = 3$ $\underline{x = 2}$
	A	B	D	C	A

Svar: $\begin{cases} x = -3 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Ö.1 Lös ekvationen

$$|x^2 - 5x + 6| = -2x + \frac{19}{4}$$

Ö.2 Lös ekvationen

a) $\big||x + 1| - |x|\big| = |1 - x|$

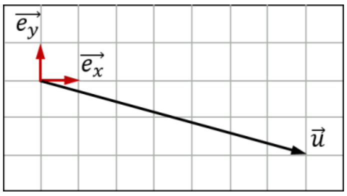
b) $\Big|\big||x + 1| - 2\big| + 3\Big| = 4$

FACIT

3

301.
- a) $(3, 12)$
- b) $(-3, 8)$
- c) $(5, -10)$
- d) $(-2, 7)$

302.



$\vec{u} = 6\vec{e_x} - 2\vec{e_x}$

303.
- a) $\sqrt{29}$
- b) $\sqrt{53}$

304.
- a) 15
- b) $\sqrt{145}$
- c) 9
- d) $\sqrt{65}$

305.
- a) $(3, -2)$
- b) $(-5, -1)$
- c) $(2, 3)$
- d) $(5, 1)$

306. $\vec{w} = (-18,\ 6)$ $(\vec{w} = -3\,\vec{u})$

307. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -2), \vec{v} = \overrightarrow{BC} = (2, -4/3)$
$\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$
Vilket innebär att A, B och C ligger på en rätt linje.

308. $y = 10$

309. $t = 2$

310. $s = -2, t = 3$

4

401.
- a) 2
- b) 2
- c) $\begin{cases} 4 - a & \text{om } a \leq 4 \\ a - 4 & \text{om } a > 4 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} 2a - 8 & \text{om } a \geq 4 \\ 8 - 2a & \text{om } a < 4 \end{cases}$
- e) 12
- f) -2
- g) $\begin{cases} 4 + a & \text{om } a \geq 0 \\ 4 - a & \text{om } a < 0 \end{cases}$
- h) $\begin{cases} 8 + a & \text{om } a \geq 0 \\ 8 - a & \text{om } a < 0 \end{cases}$

402. $a = 3$ och $b = 4$

403.
- a) $x = \pm 1$
- b) Lösning saknas
- c) $x = 2$
- d) $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$
- e) $x_1 = -11$ och $x_2 = 3$
- f) Lösning saknas

404.
- a) $x_1 = -\frac{7}{2}$ och $x_2 = -\frac{3}{2}$
- b) $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$
- c) $x_1 = -1$ och $x_2 = 5$
- d) $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$
- e) $x_1 = -\frac{2}{3}$ och $x_2 = \frac{10}{3}$
- f) $x_1 = -\frac{2}{3}$ och $x_2 = 4$

405.
- a) $x_1 = -1$ och $x_2 = \frac{1}{3}$
- b) $x = -\frac{1}{2}$
- c) $x = 1$
- d) $x = 4$
- e) $x = -1$
- f) $x = 0$

406.
- a) $x = 4$
- b) $x_1 = -3$ och $x_2 = 2$
- c) $x_1 = -5$ och $x_2 = 3U = \sqrt{PR}$

6

601.
- a) $^1/_4$
  Ledtråd:
  kopians längd/föremålets längd
- b) $^1/_{16}$
  Ledtråd: $(^1/_4)^2$
- c) $^1/_{64}$
  Ledtråd: $(^1/_4)^3$

602.
- a) $^3/_4$
  Ledtråd: Skalan brukar anges med heltal.
- b) $^9/_{14}$
- c) $6{,}8\ cm^2$ $(6{,}75)$

603. $160\ cm^3$

604. Förhållandet är 16/25 eller den mindre arean är 64 % av den större arean.
Ledtråd: 80 % kan skrivas 4/5.

605. 13 hektar (12,8)

606.
a) Längdskala=$\sqrt{2}$
b) Längdskala=$\sqrt[3]{2}$

607.
a) 105 mm
b) 0,250 m^2

608.
a) 4
b) 9
c) 16

609. Nej.
Motivering:
Kartbilden av Sverige är 157 cm lång.

610. 21 %
Ledtråd:
Längdskalan= 1,1

611. 7,0 cl
Ledtråd: Volymskalan= $\left({}^{1}/_{2}\right)^{3}$

612.
a) Rätblockens area
$A_1 = 2ab + 2ac + 2bc$
Bildens area:
$A_2 = 2 \cdot as \cdot bs + 2 \cdot as \cdot cs + 2 \cdot bs \cdot cs =$
$= s^2(2ab + 2ac + 2bc)$
$A_2 = s^2 \cdot A_1$
b) Rätblockens volym:
$V_1 = abc$
Bildens volym:
$V_2 = as \cdot bs \cdot cs = s^3 \cdot abc$

613. ${}^{b}/_{a} = \sqrt{2} - 1$

ÖVERKURS

Ö.1

a) $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$
b) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$,
$x_3 = 0$ och $x_4 = 2$

Ö.2 $x_1 = \frac{1}{2}$ och $x_2 = \frac{7-\sqrt{6}}{2}$