

Mästarprov 2: Komplexitet

Mästarprovet ska lösas **individuellt** och redovisas både skriftligt och muntligt. *Inget samarbete är tillåtet, se vidare hederskodexen.* Du ska alltså inte diskutera lösningar med någon annan fram till dess att alla muntliga redovisningar är avklarade.

Skriftliga lösningar ska lämnas senast **8 december 2015 klockan 12.15** på föreläsningen eller senast klockan 12.00 samma dag i kursens inlämningslåda inne på receptionen, Osquars backe 2, plan 4. Det är viktigt att du lämnar in i tid!

Skriv ditt namn och personnummer överst på framsidan av lösningarna. Se till att spara en kopia av dina lösningar så att du kan läsa på inför den **muntliga redovisningen** som kommer att ske 11–17 december. Boka tid för en femton minuters muntlig redovisning på kurswebbsidan senast 8 december klockan 12. Bokningslistorna läggs upp senast 3 december. Om du inte hinner göra uppgiften så avbokar du enkelt din bokning.

Det är viktigt att du förbereder dig inför den muntliga redovisningen. För att en uppgift ska godkännas ska du kunna förklara och motivera lösningen muntligt och reda ut eventuella oklarheter.

Läs uppgifterna mycket noga så att du inte råkar basera dina lösningar på en missuppfattning. Fråga en lärare på kursen om något är oklart.

Mästarprov 2 är ett obligatoriskt moment i kursen. Det består av tre uppgifter som motsvarar betygsriterierna för E, C respektive A. För godkänt (betyg E) krävs helt rätt på en av uppgifterna. Helt rätt på två av uppgifterna ger betyg C och alla rätt ger betyg A. Uppgift 3 kan dock bara bidra till betyg A och B. Ett mindre fel på en uppgift sänker betyget ett steg. Läs mer om betyg på kurswebben.

För att se exempel på hur utförliga lösningarna bör vara kan du titta på lösningar till *tidigare mästarprov* på kurswebben. Där finns också en vägledning till hur man genomför och formulerar bevis. Några dagar före inlämningen kommer noggrannare kriterier för hur bedömningen går till att publiceras på kurswebben.

1. Flyktingplaceringsproblemet

Betygsriterium: förklara principerna, utföra enklare reduktioner mellan givna problem.

Detta problem är inspirerat av det aktuella problemet att ta emot och placera asylsökande flyktingar på flyktingboenden. Det gör inte anspråk på att vara en exakt avspeglning av hur flyktingplaceringen går till i verkligheten. Du kan därför inte göra några antaganden om maxgränser för storlekt på flyktinggrupper eller flyktingboenden.

Flyktingarna kommer till Sverige i grupper av varierande storlek (från enstaka flyktingar till enorma grupper). Vid registreringen vid gränsen får varje grupp prioritera hur gärna man vill till varje tänkbar boendeort på en skala från 1 till 5, där 5 är högst. Flyktingboendeföreståndare kommer till migrationsverket i en strid ström, och varje gång ska migrationsverkets tjänsteman lösa *flyktingplaceringsproblemet* som definieras på följande sätt:

Givet: ett heltal n som anger antal platser på flyktingboendet, en lista $\{(a_i, p_i)\}$ med m stycken talpar som representerar flyktinggrupper. Flyktinggrupp i består av a_i stycken personer och deras prioritering (på en skala från 1 till 5) av den ort som det aktuella flyktingboendet ligger i anges av p_i .

Migrationsverket ska välja ut flyktinggrupper som ska placeras på boendet så att inga grupper splittras, boendets n platser utnyttjas helt och prioriteringsfunktionen, som är summan av produkterna $a_i p_i$ för dom grupper som valts ut, maximeras.

Din uppgift är att dels formulera detta optimeringsproblem som ett beslutsproblem genom att införa ett mål M för prioriteringsfunktionen och dels visa att detta beslutsproblem är NP-fullständigt. Reducera problemet delmängdssumma när du visar att flyktingplaceringsproblemet är NP-svårt.

2. Konspirationsdetektionsproblemet

Betygskriterium: visa NP-fullständighet.

(Det studerade problemet kanske du känner till från programmeringsparadigmkursen, men det påverkar inte din möjlighet att lösa uppgiften.)

Foliehattarnas Riksförbund har beställt en programvara för att söka efter möjliga konspirationer i sociala nätverk. Ett socialt nätverk i den här uppgiften består av en uppsättning personer, och information om vilka par av personer som är bekanta med varandra.

En konspiration består av ett flertal personer: en mängd konspiratörer samt en spindel i nätet, med följande egenskaper:

- Spindeln i nätet är bekant med alla konspiratörer (men kanske även andra personer som inte är konspiratörer).
- Ingen av konspiratörerna är bekant med någon annan konspiratör (eftersom detta skulle dra misstanke till sig).
- Varje person som inte redan är konspiratör eller spindeln i nätet är bekant med någon av konspiratörerna (så att konspirationen har inflytande över hela nätverket).

Att avgöra ifall en person kan vara spindeln i nätet för en möjlig konspiration är dock ett svårt problem. Din uppgift är att visa att detta problem är NP-fullständigt.

Indata till problemet är ett socialt nätverk och en person X som ingår i nätverket. Frågan är ifall X kan vara spindeln i nätet i en konspiration.

I reduktionen får du använda dom nio kända NP-fullständiga problemen i listan från föreläsning 25. Ett tips är att som inspiration studera det visualiserade NP-fullständighetsbeviset för hörntäckning på föreläsning 26.

3. Konstruktion av konspiration

Betygskriterium: göra konstruktionsreduktioner.

Åter till konspirationsdetektionsproblemet i uppgift 2. Anta att det finns en algoritm $\text{Spider}(S, X)$ som löser beslutsproblemet i tid $B(n)$, som är en positiv funktion som växer (förmodligen exponentiellt) med n , där n är antalet personer i det sociala nätverket S .

Konstruera en polynomisk turingreduktion av konstruktionsproblemet till beslutsproblemet, dvs konstruera en algoritm $\text{Conspiracy}(S, X)$ som med hjälp av anrop till Spider konstruerar (och skriver ut) en möjlig mängd konspiratörer för nätverket S och spindeln X , om det finns någon lösning.

Även om det finns flera möjliga lösningar så ska bara en skrivas ut.

Analysera tidskomplexiteten för din reduktion och motivera att den är korrekt.