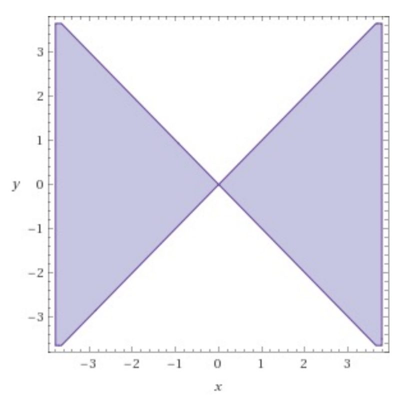
SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till tentamen 2018-08-16

DEL A

1. Givet funktionen
$$f(x,y) = \ln(x^2 - y^2).$$
   a) Bestäm definitionsmängden D för f. Rita även en bild av D. **(1 p)**
   b) Bestäm huruvida D är öppen, sluten eller ingetdera. **(1 p)**
   c) Har f några kritiska punkter i definitionsmängden D? **(1 p)**
   d) Beräkna $f_{xy}(1,0)$. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Logaritmen $\ln t$ är definierad enbart för $t > 0$. Dvs funktionen f är definierad då $x^2 - y^2 > 0$:
$$D = \{(x,y) : \; x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y) : \; |x| > |y|\}.$$



b) Området är öppet då den ges av $\{|x| > |y|\}$ med randen $\{|x| = |y|\}$ som inte tillhör området.

c) Derivering ger
$$f_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \qquad f_y = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$$
och med $(f_x, f_y) \neq (0,0)$ då $(x,y) \neq (0,0)$. Observera att i origo är gradienten inte definierad, samt att origo tillhör inte definitionsmängden. Därför saknar f kritiska punkter i sitt definistionsmängd.

d)
$$f_{xy} = \frac{4yx}{(x^2 - y^2)^2}.$$
Vi har $f_{xy}(1,0) = 0$.

e) Vi har $\nabla f(1,0) = (2,0)$, och $\mathbf{u} = (1,0)$ ger en enhetsvektor i den ritkningen. Vi får således $D_{\mathbf{u}} f(1,0) = (2,0) \cdot (1,0) = 2$.

Svar. a) $\{(x, y) \ : x^2 > y^2\}$.
b) öppen mängd.
c) Inga kritiska punkter i D.
d) $f_{xy}(1, 0) = 0$.
e) $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = (2, 0) \cdot (1, 0) = 2$.

2. För reella konstanter a, b betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F} = (ay^3 + 3x^2y, 3y^2x + bx^3).$$

(a) För vilka värden på konstanterna a, b finns det en potentialfunktion till $\mathbf{F}$? **(2 p)**

(b) För $a = b = 1$ beräkna linjeintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är en godtycklig kurva från $(0, 2)$ till $(1, 1)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vektrofältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt om $P_y = Q_x$. Eftersom

$$P_y = 3ay^2 + 3x^2, \qquad Q_x = 3y^2 + 3bx^2$$

måste vi ha $a = b = 1$ för att få $P_y = Q_x$. Därför är fältet konservativt enbart då $a = b = 1$.

(b) Eftersom fältet är konservativt för $a = b = 1$, har vi då en potentialfunktion som kan räknas med integration

$$f_x = y^3 + 3x^2y \quad \to \quad f = xy^3 + x^3y + g(y) \quad \to$$

$$f_y = 3xy^2 + x^3 + g'(y) = 3y^2x + x^3 \quad \to \quad g = konstant = K \quad \to \quad f = xy^3 + x^3y + K.$$

Vi har

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1, 1) - f(0, 2) = 2.$$

(c) Med $a = 1$, $b = 2$ har vi $\mathbf{F} = (P, Q) = (y^3 + 3x^2y, 3y^2x + 2x^3)$.
På linjesegmentet γ_2 dvs på y-axeln från $y = 2$ till $y = -1$ gäller det att $x = 0$. Vi har då $x = 0$ och $dx = 0$, som ger att $\mathbf{F} = (P, Q) = (y^3, 0)$ och

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2} Qdy = \int_{\gamma_2} 0\, dy = 0$$

eftersom $Q = 0$ på kurvan.

Svar. a) $a = b = 1$.
b) $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2$.
c) $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

3. Antag att kateterna a, b i en rätvinklig triangel är givna som $a = 8 \pm 0.03$ och $b = 6 \pm 0.01$. Uppskatta en felgräns för triangelns hypotenusa. **(4 p)**

Lösningsförslag. Pythagoras sats ger hypotenusan c som funktion av a och b,

$$c(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Enligt felfortplantningsformeln ges felgränsen E_c i c av

$$\begin{aligned} E_c &\approx \left| \frac{\partial c(\tilde{a}, \tilde{b})}{\partial a} \right| E_a + \left| \frac{\partial c(\tilde{a}, \tilde{b})}{\partial b} \right| E_b = \left| \frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}} \right| E_a + \left| \frac{\tilde{b}}{\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}} \right| E_b \\ &= \frac{\tilde{a} E_a + \tilde{b} E_b}{\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}} = \frac{8 \times 0.03 + 6 \times 0.01}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{0.24 + 0.06}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{0.3}{10} = 0.03. \end{aligned}$$

Svar.

DEL B

4. Låt
$$f(x,y) = y^3\sqrt{1-x^2-y^2}$$
och D vara det område i planet som ges av
$$D = \{(x,y) : \ x \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$$
(a) Bestäm största värdet för f över området D. **(2 p)**
(b) Beräkna integralen **(2 p)**
$$\iint_D y^3\sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy.$$

Lösningsförslag.

a) Största värdet sökes bland tre möjliga punkter: kritiska punkter, singulära punkter, randpunkter.
Kritiska punkter ges av
$$\nabla f = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{3y^2-3y^2x^2-4y^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = (0,0)$$
som ger att $x = 0$, som är på randen. Observera att betraktar man enbart de inre kritiska punkterna, då randpunkterna ska studeras separat. Därför har vi inga kritiska punkter i det inre delen av D.
Funktionen f har heller inga singulära punkter i det inre delen av D.
Nu återstår det att studera randpunkter. På cirkeln $x^2+y^2 = 1$ har vi $f = 0$.
på $\{x = 0\}$ har vi $g(y) = f(0,y) = y^3\sqrt{1-y^2}$ för $-1 \leq y \leq 1$. Derivering ger
$$\frac{3y^2-4y^4}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad \to \quad 3y^2-4y^4 = 0 \quad \to \quad y = 0, \ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
För $y = 0$ har vi $g(0) = f(0,0) = 0$. För $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ har vi
$$g(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{16}$$
som medför att största värdet är $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

b) Eftersom området D är symmetrisk m.a.p. y-axeln, och att f är en udda funktion i y-variabel $f(x,-y) = -f(x,y)$ så måste integralen vara noll. Mer exakt med $D_+ = \{(x,y) \in D : \ y > 0\}$, $D_- = \{(x,y) \in D : \ y < 0\}$ får vi
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_+} f(x,y)\, dxdy \ + \ \iint_{D_-} f(x,y)\, dxdy =$$
$$\iint_{D_+} f(x,y)\, dxdy \ + \ \iint_{D_+} f(x,-y)\, dxdy$$

$$\iint_{D_+} f(x,y)\,dxdy \;-\; \iint_{D_+} f(x,y)\,dxdy = 0.$$

Svar. a) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$
b) $\iint_D y^3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 0$

5. Låt
$$D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

(a) Skriv de rektangulära (x, y, z)-koordinaterna som funktioner av de sfäriska koordinater R, θ, ϕ. Glöm ej intervallen för de nya koordinater. **(1 p)**

(b) Ange Jacobimatrisen för koordinatbytet från rektangulära (x, y, z)-koordinater till sfäriska koordinater R, θ, ϕ. **(1 p)**

(c) Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z\, dV$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Sfäriska koordinater ges av
$$x = R\cos\theta\sin\phi, \qquad y = R\sin\theta\sin\phi, \qquad z = R\cos\phi$$
där
$$R \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

(b) Jacobimatrisen ges av
$$\begin{bmatrix} x_R & x_\theta & x_\phi \\ y_R & y_\theta & y_\phi \\ z_R & z_\theta & z_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & -R\sin\theta\sin\phi & R\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & -R\cos\theta\sin\phi & R\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -R\sin\phi \end{bmatrix}$$

(c) Området kan nu beskrivas som
$$D = \{\sqrt{\sin^2\phi} \leq \cos\phi, \quad R \leq 1\}.$$
Detta medför att $\cos\phi \geq 0$, och att $\sin\phi \leq \cos\phi$, dvs $\tan\phi \leq 1$, eller $0 \leq \phi \leq \pi/4$. (Observera att från början har vi $0 \leq \phi \leq \pi$.)
Det borde också noteras att området är oberoende av θ så att $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(d) Med $dV = R\sin\phi dRd\theta d\phi$ kan integralen I skrivas som
$$I = \int\int\int_D zdV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi/4} R^3\cos\phi\sin\phi dR\phi d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Svar. Se ovan

6. En numerisk integrationsmetod ger resultatet I_h när steglängden är h. För successivt halverade värden på h ges

$$\begin{aligned} I_h &= 1.6926479311, \\ I_{h/2} &= 1.6926505354, \\ I_{h/4} &= 1.6926506955, \\ I_{h/8} &= 1.6926507054. \end{aligned}$$

Felet antas bero snällt på steglängden.

(a) Vad är noggrannhetsordningen? **(2 p)**

(b) Ge ett så bra närmevärde som möjligt till felet i $I_{h/8}$. **(2 p)**

Lösningsförslag. När felet beror snällt på steglängden gäller för små h att

$$I_h \approx I + ch^p.$$

där p är noggrannhetsordningen och c är någon konstant.

(a) Från ovan har vi

$$I_h - I_{h/2} = I_h - I - (I_{h/2} - I) \approx ch^p - ch^p 2^{-p} = ch^p(1 - 2^{-p}).$$

Det ger

$$\frac{I_h - I_{h/2}}{I_{h/2} - I_{h/4}} \approx \frac{ch^p(1 - 2^{-p})}{ch^p 2^{-p}(1 - 2^{-p})} = 2^p.$$

Vi beräknar $I_{h/2} - I_{h/4} \approx -16.0 \cdot 10^{-8}$ och $I_{h/4} - I_{h/8} \approx -0.99 \cdot 10^{-8}$. Det ger

$$2^p \approx \frac{16.0}{0.99} \approx 16 = 2^4.$$

Noggrannhetsordningen är därför 4.

(b) Givet $p = 4$ kan vi också beräkna felet $e_h = I_h - I \approx ch^p$. Vi har då

$$I_{2h} - I_h \approx ch^p(2^p - 1) = e_h(2^p - 1) = 15e_h.$$

Med siffrorna ovan får vi

$$e_{h/8} \approx \frac{1}{15}(I_{h/4} - I_{h/8}) = \frac{-0.99}{15} \cdot 10^{-8} \approx -6.7 \cdot 10^{-10}.$$

DEL C

7. Givet ekvationsystemet

$$\begin{cases} xyz + \sin(x+y+z) + x(y+z) & = 1 \\ \cos(xyz) - e^{xyz} + x + y & = \pi/2 \end{cases}$$

(a) Visa att ekvationssystemet har en lösning på formen

$$y = y(x), \qquad z = z(x)$$

i en omgivning av punkten $(\pi/2, 0, 0)$. **(2 p)**

(b) Är $z(x)$ växande eller avtagande som funktion av x i en omgivning av $x = \pi/2$. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Sätt

$$\begin{cases} F(x,y,z) = xyz + \sin(x+y+z) + x(y+z) - 1 & = 0 \\ G(x,y,z) = \cos(xyz) - e^{xyz} + x + y - \pi/2 & = 0. \end{cases}$$

Vi har att $(\pi/2, 0, 0)$ satisfierar ekvationen. För att ekvationen ska ha den sökta lösningen behövs enligt implicita funktionssatsen att i den aktuella punkten $(\pi/2, 0, 0)$

$$det \begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} \neq 0$$

Vi får då

$$\begin{aligned} F_y &= xz + \cos(x+y+z) + x \quad \rightarrow \quad F_y(\pi/2,0,0) = \pi/2 \\ F_z &= xy + \cos(x+y+z) + x \quad \rightarrow \quad F_z(\pi/2,0,0) = \pi/2 \\ G_y &= -(xz)\sin xyz - (xz)e^{xyz} + 1 \quad \rightarrow \quad G_y(\pi/2,0,0) = 1 \\ G_z &= -(xy)\sin xyz - (xy)e^{xyz} \quad \rightarrow \quad G_z(\pi/2,0,0) = 0 \end{aligned}$$

som ger

$$det \begin{bmatrix} \pi/2 & \pi/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\pi/2 \neq 0.$$

Därför enligt implicita funktionssatsen kan y och z lösas ut i termer av x.

b) För att bestämma z_x deriverar vi båda ekvationerna m.a.p. x och löser ut $z_x(\pi/2, 0, 0)$

$$\begin{cases} yz + xy_x z + xyz_x + (1 + y_x + z_x)\cos(x+y+z) + (y+z) + x(y_x + z_x) & = 0 \\ -(yz + xy_x z + xyz_x)\sin(xyz) - (yz + xy_x z + xyz_x)e^{xyz} + 1 + y_x & = 0. \end{cases}$$

I punkten $(\pi/2, 0, 0)$ får vi

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(y_x + z_x) & = 0, \\ 1 + y_x & = 0, \end{cases}$$

som ger $y_x = -1$ och $z_x = 1$. Dvs z är växande.

Svar. a) Se ovan
b) $z = z(x)$ är växande kring $x = \pi/2$.

8. Låt C_r vara en cirkel med radien r och centrum i origo, tagen ett varv i positiv led. Sätt

$$I(r) = \int_{C_r} \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Beräkna $I(r)$ för alla $r \neq \sqrt{2}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Sätt $F_1 = \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $F_2 = -\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$. Då gäller, om $(x, y) \neq (1, 1)$

$$\partial_y F_1 = \frac{(x-1)^2 - (y-1)^2}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^2} = \partial_x F_2.$$

Eftersom F_1, F_2 är C^1 innanför C_r, då $r < \sqrt{2}$, kan vi använda Greens sats för $r < \sqrt{2}$. Observera att för $r = \sqrt{2}$ är integralen inte definierad i vanlig mening. För $r < \sqrt{2}$ får vi

$$I(r) = \int_{C_r} F_1 dx + F_2 dy = \iint_{x^2+y^2<r^2} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy = 0.$$

Låt nu $r > \sqrt{2}$, och ta en ny cirkel γ_ϵ runt punkten $(1, 1)$ med liten radie $\epsilon < r - \sqrt{2}$ så att γ_ϵ är innanför C_r. Vi parametriserar γ_ϵ i negativ led (så att den är i positiv led för området utanför). Vi har då

$$I(r) = \int_{C_r \cup \gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy) - \int_{\gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Låt

$$D_{r,\epsilon} = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < r^2, \ (x-1)^2 + (y-1)^2 > \epsilon^2\}.$$

Applicera nu Greens sats på den första integralen i $D_{r,\epsilon}$ och använd att vektorfältet är konservativt så att den första integralen blir noll

$$I(r) = \int_{C_r \cup \gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy) - \int_{\gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy) =$$

$$\iint_{D_{r,\epsilon}} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy - \int_{\gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy) = 0 - \int_{\gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Parametrisera nu kurvan γ_ϵ, enligt

$$x = 1 + \epsilon \cos\theta, \qquad y = 1 + \epsilon \sin\theta \qquad \theta : 2\pi \to 0.$$

Vi får

$$dx = -\epsilon \sin\theta d\theta, \qquad dy = \epsilon \cos\theta d\theta$$

och

$$\int_{\gamma_\epsilon} (F_1 dx + F_2 dy) = \int_{2\pi}^{0} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta) d\theta = -\int_{2\pi}^{0} d\theta = 2\pi.$$

Integralen blir då $I(r) = -2\pi$.

Svar. För $r < \sqrt{2}$ har vi $I(r) = 0$ och för $r > \sqrt{2}$ har vi $I(r) = -2\pi$

9. Givet ekvationssystemet

$$\sin(x) = y + z + 1,$$
$$\sin(y) = x + z + 2,$$
$$\sin(z) = x + y + 3.$$

Newton methods för system ska användas för att hitta en lösning nära $(x, y, z) = (-2, -1, -1/2)$. Skriv ett Matlabprogram som gör detta. Felen i x-, y- och z-värdena ska alla vara mindre än 10^{-10}. **(4 p)**

Lösningsförslag. Startgissningen väljs till $(x, y, z) = (-2, -1, -1/2)$ eftersom roten ligger nära denna punkt. Iterationerna avbryts när största förändringen i de tre komponenterna, `max(abs(DX))`, är mindre än 10^{-10}. Matlab-programmet kan tex skrivas:

```
F = @(X) [sin(X(1))-X(2)-X(3)-1;sin(X(2))-X(1)-X(3)-2;sin(X(3))-X(2)-X(1)-3];

J = @(X) [cos(X(1)) -1 -1; -1 cos(X(2)) -1; -1 -1 cos(X(3))];
X=[-2;-1;-1/2];
DX = [1; 1;1];
while max(abs(DX))>tol DX =-J(X)(X);
X = X + DX;
end
disp(X)
```

Lösningen blir

$$x \approx -2.367188800852147, \quad y \approx -1.152639777174218, \quad z \approx -0.546650273717403$$