Tentamen, del 2
SF1524
Grundläggande numeriska metoder och programmering
Tisdag 5 juni 2018 kl 8.00-11.00

Rättas endast om del 1 är godkänd. Max antal poäng på denna del är 50. Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Givet följande tabell

t	0	1	2
y	0	1	1/2

vill man hitta det styckvis kvadratiska polynomet p(t) på formen

$$p(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2, & 0 \le t \le 1, \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

som interpolerar punkterna i tabellen, är kontinuerlig och har kontinuerlig derivata i $(t, y) = (1, 1)$, samt uppfyller att

$$\int_1^2 p(t)dt = \frac{5}{2}\,.$$

(10 p) a. Ställ upp det ekvationssystem som ger koefficienterna för polynomet $p(t)$. Du behöver inte lösa ekvationssystemet för hand.

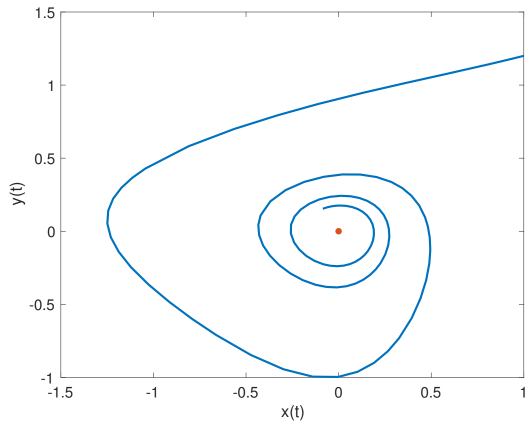
(5 p) b. Skriv ett Matlab program som beräknar koefficienterna och ritar upp polynomet $p(t)$.

P2. Följande system av ordinära differentialekvationer beskriver rörelsen $(x(t), y(t))$ hos en partikel

$$\frac{dx}{dt} = -ye^{-x} - \frac{x}{t+2}, \qquad x(0) = 1, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = xe^{-y} - \frac{y}{t+2}, \qquad y(0) = 1.2, \tag{2}$$

se figuren på nästa sida.



(2 p) **a.** Skriv en MATLAB-funktion, `HLfun.m`, som beräknar högerledet i systemet (1)-(2) och returnerar resultatet i en kolumnvektor med två komponenter. Indata till funktionen ska vara `t` och en kolumnvektor `u` som innehåller $x(t)$ och $y(t)$.

(8 p) **b.** Beskriv en algoritm, gärna i MATLAB, som löser systemet (1)-(2) till tiden $t = 20$ med en fjärde ordningens Runge-Kutta-metod (RK4). Programmet ska även rita upp partikelns bana som ges av $(x(t), y(t))$ från tiden $t = 0$ till $t = 20$.

Till din hjälp har du nedanstående MATLAB-funktion som tar ett steg med Runge-Kutta 4.

```
function uny = RK4(fun,t,h,u)

% Funktionen tar ett steg med RK4 från t till t+h
% h är steglängden
% u är lösningen vid tiden t
% fun är ett funktionshandtag till högerledsfunktionen
% fun(t,u) ska returnera en kolumnvektor motsvarande
% högerledet i systemet som skall lösas

k1 = fun(t,u);
k2 = fun(t+h/2,u+h*k1/2);
k3 = fun(t+h/2,u+h*k2/2);
k4 = fun(t+h,u+h*k3);

uny = u+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

Funktionen anropas på följande sätt `uny = RK4(@HLfun,t,h,u)` där `HLfun` är funktionen som beskriver högerledet i (1)-(2).

(4 p) **c.** Beskriv hur du skulle gå till väga för att kontrollera att din metod i **b.** har den förväntade noggrannhetsordningen. Vad betyder det att en metod har noggrannhetsordning p?

(6 p) **d.** Modifiera din algoritm i **b.** så att den löser systemet (1)-(2) och dessutom beräknar hur lång tid det tar tills dess att partikelns avstånd till origo är 0.08. För full poäng ska du redogöra för noggrannheten i den beräknade tidpunkten.

P3. Antag att vi söker en approximation av derivatan av en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som har begränsade derivator av ordning två, men vi har bara tillgång till värden $\tilde{f}(x) = f(x) + \eta(x), \; x \in [0,1]$, där $\eta(x)$ är ett osäkert mätfel som är begränsat enligt $\max_{x\in[0,1]} |\eta(x)| \le \epsilon$ för något $\epsilon > 0$, och η är ej deriverbar.

(10 p) a. Visa att approximationen

$$\frac{\tilde{f}(\frac{1}{2} + \Delta x) - \tilde{f}(\frac{1}{2})}{\Delta x} \tag{3}$$

kan användas för att uppskatta $f'(\frac{1}{2})$ och ge en feluppskattning i termer av Δx och ϵ.

(5 p) b. Avgör hur Δx ska väljas i (3) för att felet i approximationen av $f'(\frac{1}{2})$ ska bli så litet som möjligt. Hur stort blir detta fel?