SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till tentamen 2018-03-14

DEL A

1. Beräkna integralen $\iint_D (x + x^2 + y^2)\,dx\,dy$ där D är en cirkelskiva med radie a och medelpunkt i origo. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi använder polära koordinater i planet genom att sätta

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \qquad 0 \le r \le a, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Integralen övergår då i

$$\iint_D (x + x^2 + y^2)\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^a \big(r\cos t + (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2\big)\,rdrdt$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \big(r^2\cos t + r^3\big)\,drdt = \int_0^{2\pi} (\frac{a^3}{3}\cos t + \frac{a^4}{4})dt = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Svar. $\frac{\pi a^4}{2}$

2. Givet funktionen $f(x, y, z) = xz^3 + x^2y^3z + yz^3$.
   a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 3$ i punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. **(2 p)**
   b) Bestäm en riktning $\boldsymbol{v}$ så att riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(1, 1, 1) = 0$. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Sätt $F(x, y, z) = f(x, y, z) - 3 = 0$. Denna ekvation representerar en nivåyta och därför kan tangentplanet ges genom att bestämma normalen till ytan i den aktuella punkten. Vi har således att

$$\mathbf{n} = \nabla F = (z^3 + 2xy^3z, 3x^2y^2z + z^3, 3xz^2 + x^2y^3 + 3yz^2)$$

som i punkten $(1, 1, 1)$ blir $\mathbf{n} = (3, 4, 7)$. Ekvationen för ett plan genom punkten $\mathbf{x}^0$ med normalen $\mathbf{n}$ ges då av

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = (3, 4, 7) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

dvs

$$3x + 4y + 7z = 14.$$

b) Observera att vi redan har fått fram $\nabla f = \nabla F$ i den aktuella punkten, som är $\nabla f(1, 1, 1) = (3, 4, 7)$. Riktningsderivata i riktningen $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, med $\|\nu\| = 1$ ska vara noll, dvs

$$(3, 4, 7) \cdot \nu = 0 \qquad \rightarrow \qquad 3\nu_1 + 4\nu_2 + 7\nu_3 = 0.$$

Dvs varje vektor med den egenskapen uppfyller kravet. Ett exempel är $\frac{1}{5}(-4, 3, 0)$.

Observera att varje vektor parallel med tangentplanet uppfyller detta villkor.

Svar. a) $3x + 4y + 5z = 14.$

b) Alla vektorer parallella med tangentplanet. Det kan finnas olika svar.

3. Antag att du har approximerat integralen

$$\int_0^{3.6} e^{-x^2/9} dx$$

med trapetsregeln där du använde steglängd $h = 0.1$. Du har uppskattat felet till ca $1.6 \cdot 10^{-4}$. Om du vill minska felet till 10^{-7}, hur bör du välja din steglängd? **(4 p)**

Lösningsförslag. Trapetsregeln är en andra ordningens metod så felet e_h vid steglängd h är approximativt proportionellt mot h^2, dvs

$$e_h \approx Ch^2.$$

Med de givna siffrorna har vi

$$1.6 \cdot 10^{-4} \approx C(0.1)^2, \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 1.6 \cdot 10^{-2}.$$

För att få felet 10^{-7} behöver vi då hitta en steglängd h som uppfyller

$$1.6 \cdot 10^{-2} h^2 \approx 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad h \approx \frac{10^{-2}}{\sqrt{16}} = 0.0025.$$

Vi kan alternativt observera att vi behöver minska felet med en faktor 1600 och måste då minska h med en faktor $\sqrt{1600} = 40$. Vi får samma svar eftersom $0.1/40 = 0.0025$.

Svar. $h = 0.0025$

DEL B

4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \sin y, xz \cos y, x \sin y)$.
   (a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$. **(3 p)**
   (b) Beräkna

$$\int_\gamma z \sin y \, dx + xz \cos y \, dy + x \sin y \, dz$$

då γ är kurvan som kan parametriseras som $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/\pi)$ när t löper från 0 till π. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) För att visa att $\mathbf{F}$ är konservativt (i hela rummet $\mathbb{R}^3$) räcker det att visa att

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

i hela $\mathbb{R}^3$, eftersom $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande. Låt $P = z \sin y$, $Q = xz \cos y$ och $R = x \sin y$ beteckna de tre komponentfunktionerna hos $\mathbf{F}$. Vi får

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= (x \cos y - x \cos y, \sin y - \sin y, z \cos y - z \cos y) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

(b) Eftersom fältet är konservativt kan vi byta väg. Vi observerar att kurvan γ går från punkten $(1, 0, 0)$ till punkten $(-1, 0, 1)$. Vi väljer det räta linjesegmentet l som löper mellan dessa punkter som integrationsväg, och l kan parametriseras med $\mathbf{r}(t) = (1 - 2t, 0, t)$ med t löpande från 0 till 2; detta ger $\mathbf{r}'(t) = (-2, 0, 1)$ Vi får

$$\begin{aligned}\int_\gamma z \sin y \, dx + xz \cos y \, dy + x \sin y \, dz &= \int_l z \sin y \, dx + xz \cos y \, dy + x \sin y \, dz \\ &= \int_0^2 (t \sin 0) \cdot (-2) + (1 - 2t)(t \cos 0) \cdot 0 + (1 - 2t)(\sin 0) \cdot 1 \, dt = 0.\end{aligned}$$

Alternativ lösning för b) delen är att ta fram potentialfunktionen $\phi(x, y, z) = xz \sin y$ och bestämma integralen via potentialfunktionen

$$\int_\gamma z \sin y \, dx + xz \cos y \, dy + x \sin y \, dz = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(-1, 0, 1) - \phi(1, 0, 0) = 0.$$

Svar. a) Se ovan
b) Integralen blir 0.

5. Funktionen $f(x,y)$ är två gånger deriverbar med kontinuerliga andraderivator i hela $\mathbb{R}^2$. Vidare för $n = 1, 2, \cdots$, gäller det att

$$\left|\nabla f(\frac{1}{n}, 0)\right| \leq \frac{100}{n}, \qquad \text{samt} \qquad f_{xx}(0,0) = 4, \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad f_{yy}(0,0) = 2.$$

a) Är origo $(0,0)$ en kritisk punkt till f? (Motivera ditt svar.) **(2 p)**

b) Anta (oavsett uppgift a) att origo är en kritisk punkt för f och avgör om origo är en lokal maximum, minimum eller sadel punkt. **(2 p)**

Lösningsförslag. **a)** Då $(x,y) \to (0,0)$ längs sekvensen $(1/n, 0)$ så har vi att

$$\left|\nabla f(\frac{1}{n}, 0)\right| \leq \frac{100}{n} \to 0.$$

Dessutom har f kontinuerliga derivator, dvs ∇f är kontinuerlig. Detta medför att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y)$$

är oberoende av valet av (x,y) och därför

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = (0,0).$$

Alltså origo är en kritisk punkt.

b) Eftersom $f(x,y)$ är två gånger deriverbar med kontinuerliga andra derivator så skrivs

$$f(x,y) = f(0,0) + 4x^2 + 2y^2 + O(x^2 + y^2)^{3/2} > f(0,0)$$

då $(x,y) \neq (0,0)$ i en omgivning av $(0,0)$. Dvs f har en minimipunkt i origo.

Svar. **a)** Ja, origo är en kritisk punkt.

b) En minimi-punkt.

6. Vi vill bestämma ett tredjegradspolynom $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ som interpolerar punkterna:

x	-1	-0.5	0.5	2
y	1	2	0	-3

(a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som måste lösas för att beräkna koefficienterna c_j. **(2 p)**

(b) Istället för att interpolera den tredje punkten $(x, y) = (1/2, 0)$ vill vi nu att följande integralvillkor ska gälla
$$\int_0^1 p(x)dx = 1.$$
Hur ändrar sig ekvationsystemet? **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Polynomets koefficienter skall satisfiera ekvationerna
$$\begin{aligned}
p(-1) &= 1, & \Rightarrow && c_0 - c_1 + c_2 - c_3 &= 1,\\
p(-1/2) &= 2, & \Rightarrow && c_0 - c_1/2 + c_2/4 - c_3/8 &= 2,\\
p(1/2) &= 0, & \Rightarrow && c_0 + c_1/2 + c_2/4 + c_3/8 &= 0,\\
p(2) &= -3, & \Rightarrow && c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= -3,
\end{aligned}$$
I matrisform får vi
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
b) Den tredje ekvationen ($p(1/2) = 0$) byts nu mot
$$\begin{aligned}
\int_0^1 p(x)dx = 1, \Rightarrow \int_0^1 c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 dx &= 1,\\
\Rightarrow \left[c_0x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3} + c_3\frac{x^4}{4} \right]_0^1 &= 1,\\
\Rightarrow c_0 + c_1\frac{1}{2} + c_2\frac{1}{3} + c_3\frac{1}{4} &= 1.
\end{aligned}$$
Den tredje raden i matrisen och tredje elementet i högerledet ändrar sig därför. Det nya systemet blir
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

DEL C

7. (a) Betrakta optimeringsproblemet att hitta största samt minsta värdet för en funktion $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$, där f och g är funktioner med kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$. Antar f alltid ett största och ett minsta värde på mängden $g(x, y) = 0$? Bevisa ditt påstående eller ge ett motexempel. **(1 p)**

   (b) Herbert ska bygga en snögubbe bestående av två snöklot staplade på varandra. Han vill att snögubben ska ha höjden 2 m samtidigt som han vill minimera det arbete som krävs för att bygga snögubben, dvs. minimera snögubbens totala potentiella energi. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma vilka radier de två kloten ska ha för att minimera potentiella energin. **OBS:** Enbart Lagranges metod ger poäng. **(3 p)**

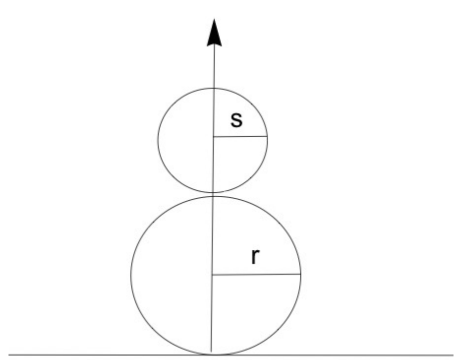
   (*Ledning:* En kropp har den potentiella energin mgh där m är kroppens massa, g tyngdaccelerationen, och h är masscentrums höjd över markplanet. Du kan även anta att snön har konstant masstäthet ρ.)

Lösningsförslag. a) Nej, detta behöver inte vara fallet om $\{g = 0\}$ ej begränsad. Ett exempel ges av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, och $g(x, y) = x$ och f får inte maximum på $g = 0$.

Ett alternativt exempel är $f = 1/(x^2 + y^2)$ på en obegränsad kurva $g = xy$, säg. Vi har $f > 0$ och minimum antas inte, på kurvan.

b) Inför beteckningar

$$r = \text{ radie av undre klot} \qquad s = \text{radie av övre klot}$$



Snögubbens potentiella energi ges av

$$W = m_{undre} g r + m_{ovre} g (2r + s)$$

där

$$m_{undre} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \qquad m_{ovre} = \frac{4}{3}\pi s^3 \rho.$$

Alltså

$$W = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g r + \frac{4}{3}\pi s^3 \rho g(2r+s) = \frac{4}{3}\pi \rho g \left(r^4 + s^3(2r+s)\right).$$

Villkoret att snögubbens höjd är 2m ger att $2r + 2s = 2$ dvs $r + s = 1$.

Problemet kan nu formuleras som minimeringsproblem

$$\min f(r,s) = r^4 + s^3(2r+s) \qquad \text{då} \;\; g(r,s) = r + s - 1 = 0,$$

samt $r, s \geq 0$. Enligt Lagranges metod har vi

$$\nabla f = (4r^3 + 2s^3, 6s^2 r + 4s^3) = \lambda \nabla g = \lambda(1,1)$$

som leder till $4r^3 - 2s^3 - 6s^2 r = 0$. Bivillkoret $r + s = 1$ ger att $s = 1 - r$ som insatt i ekvationen medför

$$4r^3 - 2(1-r)^3 - 6(1-r)^2 r = 0 \quad \to \quad 3r^2 - 1 = 0$$

som har lösningen $r = 1/\sqrt{3} > 0$.

Eftersom $f(1/\sqrt{3}, 1 - 1/\sqrt{3}) = 1 - 4/3\sqrt{3} < 1 = f(1,0) = f(0,1)$ så ger $r = 1/\sqrt{3}$ och $s = 1 - 1/\sqrt{3}$ minst potentiell energi.

Svar. $r = 1/\sqrt{3}$ och $s = 1 - 1/\sqrt{3}$

8. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} x^4 dS$$

då $\mathcal{S}$ betecknar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **(6 p)**

Lösningsförslag. Pga symmetri får vi

$$\iint_{\mathcal{S}} x^4 dS = \iint_{\mathcal{S}} y^4 dS = \iint_{\mathcal{S}} z^4 dS = \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}} x^4 + y^4 + z^4 dS$$
$$= \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}} (x^3, y^3, z^3)\cdot(x, y, z) dS = \frac{a}{3}\iint_{\mathcal{S}} (x^3, y^3, z^3)\cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Vi använder nu divergenssatsen och integralen blir

$$\frac{a}{3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} 3(x^2+y^2+z^2) dV = a\int_0^a R^2 R^2 dR \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = 4\pi a^6/5.$$

Alt. lösning Man kan använda sfäriska koordinater och successiv integrera termerna

$$\iint_{\mathcal{S}} x^4 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^4\cos^4\theta\sin^4\phi\sin\phi\, a^2 d\theta d\phi = a^6\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^5\phi d\phi = ... = a^6\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{16}{15} = \frac{4a^6\pi}{5} =$$

Använder man sig av denna metod måste man kunna mins en ad dessa formler:

$$\sin^5\phi = (5/8)\sin\phi - (5/16)\sin(3\phi) + (1/16)\sin(5\phi)$$
$$\sin^5\phi = (1-\cos^2\phi)^2\sin\phi$$

som kan integrears. Integralen $\int_0^{\pi}\sin^5\phi d\phi$ kan beräknas

$$\int_0^{\pi}\sin^5\phi d\phi = \int_0^{\pi}\sin^4\phi\sin\phi d\phi = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)^2\sin\phi d\phi = \begin{cases} u = \cos\phi \\ du = -\sin\phi \\ u: 1\to -1 \end{cases}$$
$$= \int_{-1}^{1}(1-u^2)^2 du = \frac{16}{15}$$

I båda fallen har vi använt sfärsika koordinater enligt

$$x = a\cos\theta\sin\phi, \qquad y = a\sin\theta\sin\phi, \qquad z = a\cos\phi$$

med

$$0\le\theta<2\pi, \qquad 0\le\phi<\pi.$$

Svar. $4\pi a^6/5$

9. Låt
$$\phi(t) = \cos(\omega t)e^{-\sigma t^2}.$$
Parametrarna ω och σ ska bestämmas så att
$$\phi(1) = 0.05, \qquad \phi(2) = -0.95.$$
Värdet på ω ska ligga i intervallet $(0, 4)$. Problemet leder till ett ickelinjärt ekvationssystem för σ och ω som ska lösas med Newtons metod för system.
   (a) En bra startgissning för ω är 1.57. Ange, med motivering, en bra startgissning för σ. **(1 p)**
   (b) Skriv ett MATLAB-program som implementerar Newtons metod för system och beräknar värden på ω, σ med fel mindre än 10^{-10}. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) En bra startgissning ges av lösningen till det närliggande problemet där $\phi(1) = 0$ och $\phi(2) = -1$. Detta problem har lösningen $\omega = \pi/2 \approx 1.57$ och $\sigma = 0$.

b) Vi behöver lösa $F(\omega, \sigma) = 0$, där
$$F(\omega, \sigma) = \begin{pmatrix} \cos(\omega)e^{-\sigma} - 0.05 \\ \cos(2\omega)e^{-4\sigma} + 0.95 \end{pmatrix}.$$
Funktionens Jakobian-matris är
$$J(\omega, \sigma) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega)e^{-\sigma} & -\cos(\omega)e^{-\sigma} \\ -2\sin(2\omega)e^{-4\sigma} & -4\cos(2\omega)e^{-4\sigma} \end{pmatrix}.$$
Med $X_n = [\omega_n, \sigma_n]^T$ blir Newtons metod
$$X_{n+1} = X_n - J(X_n)^{-1}F(X_n), \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1.57 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Lösningen blir $\omega \approx 1.5202$ och $\sigma \approx 0.011541$.

En Matlab-implementation kan se ut som följer: