KTH Teknikvetenskap

Lösningsförslag till modelltentamen 2

Variant Förberedande kurs i matematik

SF0003 Introduktion i matematik
Augusti 2017

1. Förenkla $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}{\frac{9}{4}-\frac{1}{3}}$ genom att skriva på gemensamt bråkstreck. Resultatet ska vara förkortat så långt det går.

   Lösningsförslag: Vi har

$$\begin{aligned}\frac{1/3-2/7}{9/4-1/3} &= \frac{21}{21}\cdot\frac{1/3-2/7}{9/4-1/3} = \frac{7-6}{21(9/4-1/3)}\\ &= \frac{12}{12}\cdot\frac{1}{21(9/4-1/3)} = \frac{12}{21(27-4)} = \frac{12}{21\cdot 23} = \frac{4}{7\cdot 23}.\end{aligned}$$

2. Förenkla $\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{4x-1}{x^2+x}$ genom att skriva på gemensamt bråkstreck. Resultatet ska vara förkortat så långt det går.

   Lösningsförslag: Vi har $x^2+x = x(x+1)$, så

$$\begin{aligned}\frac{3}{x}-\frac{7}{x+1}+\frac{4x-1}{x^2+x} &= \frac{3(x+1)}{x(x+1)}-\frac{7x}{x(x+1)}+\frac{4x-1}{x(x+1)}\\ &= \frac{3(x+1)-7x+(4x-1)}{x(x+1)}\\ &= \frac{2}{x(x+1)}.\end{aligned}$$

3. Använd kvadratkomplettering för att bestämma det minsta värde som polynomet x^2+3x+4 antar.

   Lösningsförslag: Vi kvadratkompletterar polynomet och får

$$\begin{aligned}x^2+3x+4 &= x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4\\ &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4\\ &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

   Eftersom den första termen alltid är större än eller lika med noll, så får vi det minsta värdet då den är lika med noll (och $x=-3/2$). Polynomets minsta värde är alltså $7/4$.

4. Förenkla $\ln 81 - \ln 9 - \ln 3$.

   Lösningsförslag: Vi har
$$\ln 81 - \ln 9 - \ln 3 = \ln \frac{81}{9 \cdot 3} = \ln 3.$$

5. Bestäm ekvationen för den cirkel som har medelpunkt $(-1, 2)$ och innehåller punkten $(2, 6)$.

   Lösningsförslag: Cirkelns radie r är lika med avståndet från medelpunkten till den givna punkten på cirkeln. Alltså är
$$r^2 = (2 - (-1))^2 + (6 - 2)^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$
   så $r = 5$. Cirkelns ekvation är
$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 5^2,$$
   eller
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

6. Antag att $-\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \dfrac{\pi}{2}$ och att $\sin v = a$. Uttryck $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$ med hjälp av a.

   Lösningsförslag: Additionsformeln för sin ger oss att
$$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(-v) + \cos(\frac{\pi}{2}) \sin(-v) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(v) - \cos(\frac{\pi}{2}) \sin(v).$$
   Eftersom $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ och $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ så ger detta
$$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(v).$$
   Trigonometriska ettan ger
$$\cos^2(v) = 1 - \sin^2(v) = 1 - a^2,$$
   och
$$\cos(v) = \pm\sqrt{1 - a^2}.$$
   Då $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ så är $\cos(v) \geq 0$, och vi drar slutsatsen att
$$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(v) = \sqrt{1 - a^2}.$$