KTH Teknikvetenskap

# Lösningsförslag till modelltentamen 1

*Variant Förberedande kurs i matematik*

**SF0003 Introduktion i matematik**
**Augusti 2017**

1. Skriv $\dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{10} + \dfrac{13}{15}$ på gemensamt bråkstreck. Resultatet ska vara färdigförkortat.

   *Lösningsförslag:* Minsta gemensamma nämnare är $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, så vi har

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{13}{15} = \frac{5}{30} - \frac{9}{30} + \frac{26}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

2. Bestäm koefficienterna framför $x$ och $x^2$ när uttrycket $(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1)$ utvecklas.

   *Lösningsförslag:* Istället för att utveckla hela uttrycket och därefter identifiera koefficienterna framför $x$ resp. $x^2$ räcker det att hitta de kombinationer av en term från första, andra och tredje parentesen som ihopmultiplicerade ger en $x$- resp. $x^2$-term.

   För att få en $x$-term så finns det två möjliga kombinationer,

$$(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1) = \cdots + x \cdot (-1) \cdot 1 + \cdots ,$$

$$(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1) = \cdots + 3 \cdot 2x \cdot 1 + \cdots ,$$

   och $x$-termen blir $-x + 6x = 5x$, dvs. koefficienten framför $x$ är 5.

   Det finns tre kombinationer som leder fram till $x^2$-termer,

$$(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1) = \cdots + x \cdot 2x \cdot 1 + \cdots ,$$

$$(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1) = \cdots + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + \cdots ,$$

$$(x+3)(x^2+2x-1)(19x^3-x^2+1) = \cdots + 3 \cdot (-1) \cdot (-x^2) + \cdots ,$$

   och sammantaget blir $x^2$-termen $2x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 8x^2$, dvs. koefficienten framför $x^2$ är 8.

3. Bestäm skärningspunkten mellan linjen $x + 2y - 4 = 0$ och linjen $x = 10$.

   *Lösningsförslag:* Eftersom skärningspunkten ligger på linjen $x = 10$ så är dess $x$-koordinat lika med 10. Skärningpunktens $y$-koordinat uppfyller $x+2y-4 = 10+2y-4 = 0$, eller $6+2y = 0$, vilket ger $y = -3$. Skärningspunkten är alltså $(10, -3)$.

4. Lös ekvationen $3\sqrt{3-x} = 5 - x$.

   *Lösningsförslag:* Om $3\sqrt{3-x} = 5-x$ så följer att

$$(3\sqrt{3-x})^2 = 9(3-x) = (5-x)^2 = x^2 - 10x + 25$$

   eller

$$0 = x^2 - 10x + 25 + 9x - 27 = x^2 - x - 2$$

   vilket är uppfyllt för $x = -1$ och $x = 2$. Eftersom vi har kvadrerat ekvationen är det inte säkert att detta också är lösningar till den ursprungliga ekvationen.

   För $x = -1$ har vi

$$3\sqrt{3-(-1)} = 3\sqrt{4} = 6 = 5-(-1),$$

   så detta är en lösning.

   För $x = 2$ har vi

$$3\sqrt{3-2} = 3\sqrt{1} = 3 = 5-3,$$

   så detta är också en lösning.

   Lösningarna till ekvationen är alltså $x = -1$ och $x = 2$.

5. Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel som ges av ekvationen $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 1$.

   *Lösningsförslag:* Vi kvadratkompletterar och får

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 - 2x + y^2 + 2y \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 \\ &= (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1, \end{aligned}$$

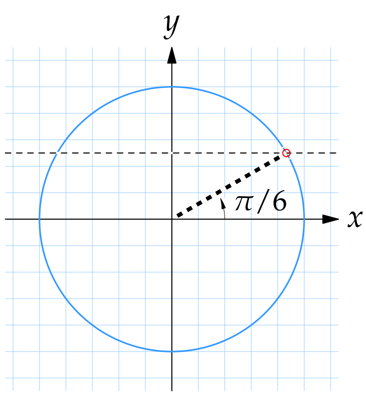
   eller

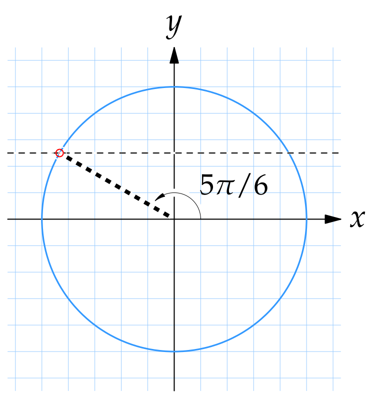
$$3 = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

   Detta är ekvationen för en cirkel med medelpunkt $(x, y) = (1, -1)$ och radie $r = \sqrt{3}$.

6. Lös ekvationen $\sin 5x = \frac{1}{2}$.

   *Lösningsförslag:* Vi bestämmer först lösningarna till ekvationen när $0 \leq 5x \leq 2\pi$. Enligt enhetscirkeln finns två sådana lösningar: $5x = \pi/6$ och $5x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.



Resterande lösningar får vi fram genom att lägga till heltalsmultipler av $2\pi$ till ovanstående två lösningar,

$$5x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{och} \quad 5x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

där $n$ är ett godtyckligt heltal, eller om vi dividerar med 5,

$$x = \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \quad \text{och} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5},$$

där $n$ är ett godtyckligt heltal.