KTH Teknikvetenskap

Lösningsförslag till modelltentamen 2

Variant Adams Calculus

SF0003 Introduktion i matematik
Augusti 2017

1. Lös olikheten $|2x+5| \leq 1$.

   Lösningsförslag: Vi har

$$\begin{aligned} |2x+5| \leq 1 &\iff -1 \leq 2x+5 \leq 1 \\ &\iff -1-5 \leq 2x \leq 1-5 \\ &\iff -6/2 \leq x \leq -4/2, \end{aligned}$$

   så olikheten är uppfylld för $-3 \leq x \leq -2$.

2. Ligger punkten $(3,2)$ på, ovanför, eller under linjen $x + 4y = 7$?

   Lösningsförslag: För $x = 3$ ger ekvationen $3 + 4y = 7$ och $y = 1$. Punkten $(3,1)$ ligger alltså på linjen, och punkten $(3,2)$ ligger ovanför denna.

3. För vilka x är funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x+2}$ definierad?

   Lösningsförslag: För att funktionen $f(x)$ ska vara definierad så måste båda termerna vara definierade. Den första termen $1/x$ är definierad för $x \neq 0$. Den andra termen är definierad då $x + 2 \geq 0$, vilket är det samma som $x \geq -2$. Funktionen är alltså definierad för x sådana att $x \geq -2$ och $x \neq 0$.

4. Skriv polynomet $3x^2 + 7x - 6$ som en produkt av linjära faktorer.

   Lösningsförslag: Ekvationen $x^2 + \frac{7}{3}x - 2 = 0$ har lösningarna $x = -3$ och $x = 2/3$, så

$$x^2 + \frac{7}{3}x - 2 = (x+3)(x-2/3).$$

   För att få det ursprungliga polynomet multiplicerar vi med 3,

$$3x^2 + 7x - 6 = (x+3)(3x-2).$$

5. Bestäm $\sin\theta$ om $\cos\theta = -5/13$ och $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

   Lösningsförslag: Trigonometriska ettan ger att

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2.$$

Eftersom $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ så är $\sin\theta \geq 0$, och alltså har vi

$$\sin\theta = \frac{12}{13}.$$

6. Uttryck de båda komplexa talen $z = 2i$ och $w = \sqrt{3} - i$ på polär form, det vill säga termer av deras belopp och argument. Använd dessa uttryck för att beräkna zw och z/w. Ange svaren på formen $a + bi$.

   Lösningsförslag: Vi har

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2, \qquad \arg(z) = \pi/2$$

och

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \qquad \arg(w) = -\pi/6.$$

För produkten zw har vi

$$|zw| = |z| \cdot |w| = 2 \cdot 2 = 4$$

och

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = \pi/2 + (-\pi/6) = \pi/3,$$

vilket betyder att

$$zw = 4(\cos(\pi/3) + \sin(\pi/3)i) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i.$$

För produkten zw har vi

$$|z/w| = |z|/|w| = 2/2 = 1,$$

och

$$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w) = \pi/2 - (-\pi/6) = 2\pi/3,$$

vilket betyder att

$$z/w = 1(\cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3)i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$