KTH Teknikvetenskap

Lösningsförslag till modelltentamen 1

Variant Adams Calculus

SF0003 Introduktion i matematik
Augusti 2017

1. Lös olikheten $\dfrac{6-x}{4} > \dfrac{3x-4}{2}$.

   Lösningsförslag: Vi har

$$\begin{aligned} \frac{6-x}{4} > \frac{3x-4}{2} &\Longleftrightarrow 6 - x > 2(3x-4) = 6x - 8 \\ &\Longleftrightarrow 8 + 6 > 6x + x \\ &\Longleftrightarrow 14 > 7x \\ &\Longleftrightarrow 2 > x. \end{aligned}$$

   Olikheten är alltså uppfylld för $x < 2$.

2. Bestäm ekvationen för den cirkel som har medelpunkt $(-3, 2)$ och innehåller punkten $(5, 8)$.

   Lösningsförslag: Cirkelns radie r är lika med avståndet från medelpunkten till den givna punkten. Alltså är

$$r^2 = (5-(-3))^2 + (8-2)^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

   så $r = 10$. Cirkelns ekvation är

$$(x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 10^2,$$

   eller

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100.$$

3. För vilka x är funktionen $f(x) = \sqrt{7-3x}$ definierad?

   Lösningsförslag: För att kvadratroten ska vara definierad så måste uttrycket inuti vara icke-negativt. Alltså måste

$$7 - 3x \geq 0 \Longleftrightarrow 7 \geq 3x \Longleftrightarrow \frac{7}{3} \geq x.$$

4. Skriv polynomet $x^2 - 6x + 8$ som en produkt av linjära faktorer.

   Lösningsförslag: Ekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$ har lösningarna $x = 2$ och $x = 4$. Det betyder att

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4).$$

5. Uttryck $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ i termer av $\sin x$ och $\cos x$.

Lösningsförslag: Med additionsformeln för cos har vi

$$\begin{aligned}\cos(3\pi/4 - x) &= \cos(3\pi/4)\cos(-x) - \sin(3\pi/4)\sin(-x) \\ &= \cos(3\pi/4)\cos(x) + \sin(3\pi/4)\sin(x).\end{aligned}$$

Eftersom $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ och $\sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ger detta

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x).$$

6. Uttryck det komplexa talet $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ på polär form, det vill säga i termer av belopp och argument. Använd detta uttryck för att beräkna $1/z$. Svara på formen $a + bi$.

Lösningsförslag: Vi har

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/4)^2} = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1, \qquad \arg(z) = \pi/6.$$

För kvoten $1/z$ har vi att

$$|1/z| = 1/|z| = 1/1 = 1$$

och

$$\arg(1/z) = \arg(1) - \arg(z) = 0 - \pi/6 = -\pi/6,$$

vilket betyder att

$$1/z = 1(\cos(-\pi/6) + \sin(-\pi/6)i) = 1(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i.$$