Tentamen, SG1109, 21/8, 2017, Lösningar

Problemdel

1.

$$\mathbf{r}_G = \frac{a}{3}\mathbf{e}_x + \frac{a}{3}\mathbf{e}_y\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y\,, \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_{CD} = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z)\,, \tag{4}$$

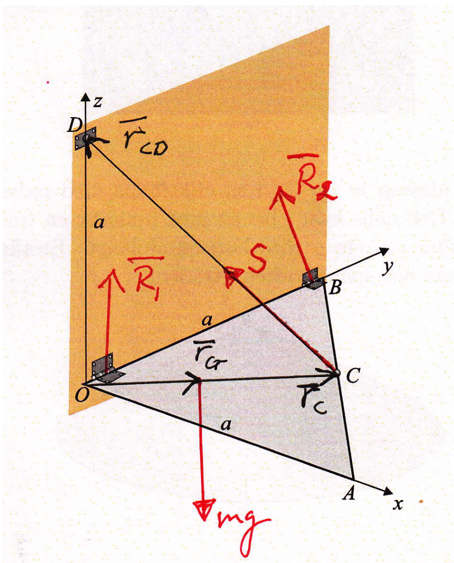
$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{CD} \tag{5}$$

Reaktionskrafterna i gångjärnen bidrar inte till momentet M_y med avseende på y-axeln, eftersom de angriper på y-axeln. Därför formuleras jämviktsvillkoret som $M_y = 0$.

$$M_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{r}_G \times (-mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_C \times \mathbf{S}) = 0 \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\mathbf{e}_y \cdot \left(\left(\frac{a}{3}\mathbf{e}_x + \frac{a}{3}\mathbf{e}_y\right) \times (-mg\mathbf{e}_z) + \left(\frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{a}{2}\mathbf{e}_y\right) \times S\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z)\right) = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mg}{3} - \frac{S}{\sqrt{6}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{6}}{3}mg\,. \tag{8}$$



2. Lagen om den kinetiska energin ger

$$\frac{1}{2}mv^2 - T_A = R\theta T - mgh\,, \tag{9}$$

där $h = R(1-\cos\theta)$ är den höjd vid vilken fordonet befinner sig vid i förhållande till A. Eftersom hastigheten är noll i A har vi att $T_A = 0$. Alltså får vi

$$mv^2 = 2R\theta T - 2mgR(1-\cos\theta) \tag{10}$$

Newtons andra lag i normalled ger

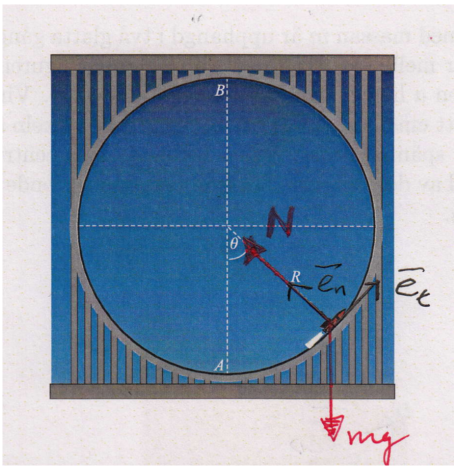
$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta \tag{11}$$

Ekvation (10) och (11) ger

$$N = 2\theta T + mg(3\cos\theta - 2) \tag{12}$$

För att fordonet ska fullgöra ett helt varv måste normalkraften vara större än eller lika med noll i B ($\theta = \pi$). Den minsta dragkraften är alltså

$$T_{min} = \frac{5}{2\pi}mg \tag{13}$$



3. Newtons andra lag ger

$$\mathbf{e}_r: \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -S\cos\alpha + N\sin\alpha \tag{14}$$
$$\mathbf{e}_\theta: \quad 0 = S\sin\alpha + N\cos\alpha - mg \tag{15}$$

Med $\ddot{r} = 0$ och $r\dot{\theta} = v_0$ fås

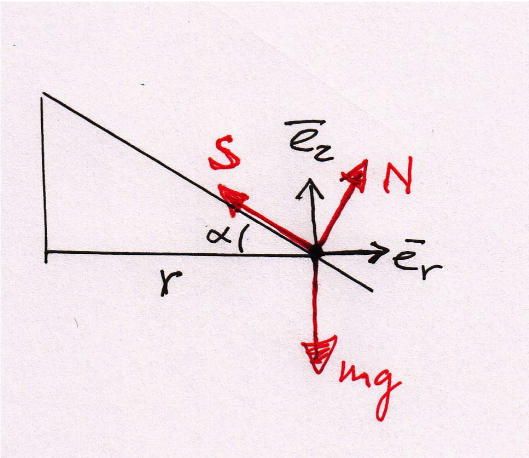
$$\frac{mv_0^2}{r} = S\cos\alpha - N\sin\alpha \tag{16}$$
$$mg = S\sin\alpha + N\cos\alpha \tag{17}$$

Om vi multiplicera (16) med $\cos\alpha$ och (17) med $\sin\alpha$ och adderar får vi

$$S = \frac{mv_0^2}{r}\cos\alpha + mg\sin\alpha \tag{18}$$

På liknande sätt fås

$$N = mg\cos\alpha - \frac{mv_0^2}{r}\sin\alpha \tag{19}$$



4. Månlandarens ursprungliga hastigheten i punkten A får genom Newtons andra lag

$$m\frac{v^2}{2R} = \frac{mg_mR^2}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g_mR}{2}}. \tag{20}$$

Den nya hastigheten som gör att månlandaren går in i den önskade banan fås genom att ställa upp konserveringslagarna för energi och rörelsemängdsmoment:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{g_mR^2}{2R} = \frac{1}{2}mv_P^2 - g_mR \tag{21}$$

$$2Rv_A = Rv_P \tag{22}$$

Detta ger

$$3v_A^2 = g_mR \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{g_mR}{3}} \tag{23}$$

Hastighetsminskningen är skillnaden mellan den ursprungliga och den nya hastigheten:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{g_mR}{2}} - \sqrt{\frac{g_mR}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{g_mR} \tag{24}$$