

Lösningar till Tentamen, SG1109, 1/6, 2017

1. Ur figuren får vi

$$\mathbf{r}_{AB} = (-3, -3, 4)a \Rightarrow \mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3, -3, 4)}{\sqrt{34}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_{OB} = (-3, 3, 4)a, \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{OG} = (0, 3/2, 2)a, \quad (3)$$

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_{AB}. \quad (4)$$

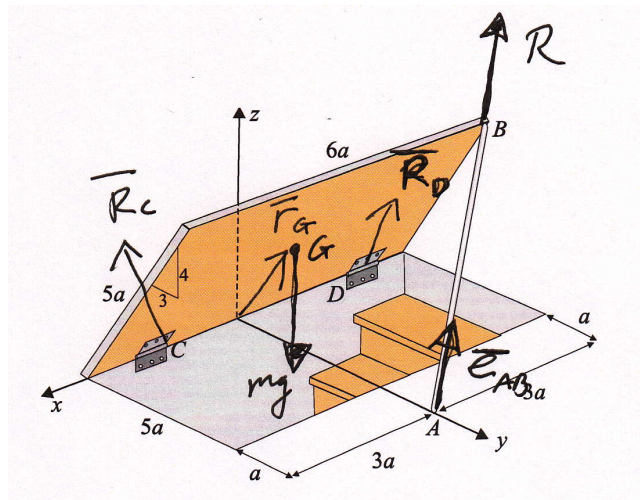
Momentjämvikt m a p origo ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{R} + \mathbf{r}_{OG} \times (-mg\mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{R}_D = \mathbf{0} \quad (5)$$

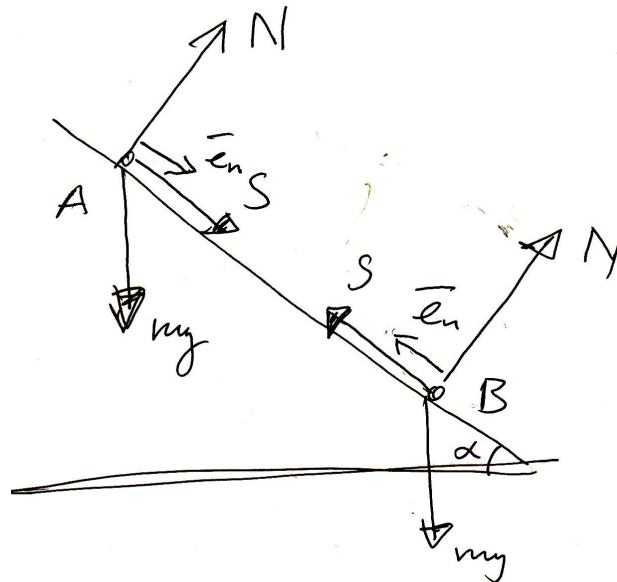
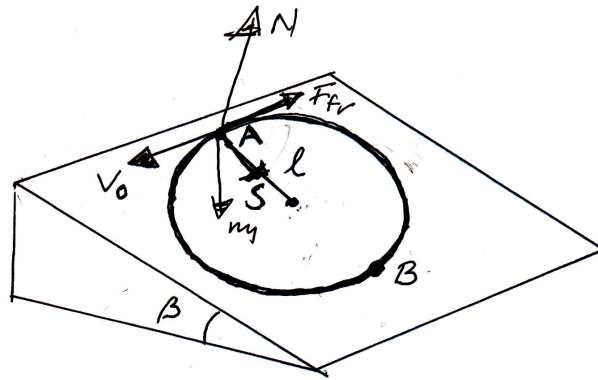
Reaktionskrafterna i C och D bidrar inte till momentet m a p x -axeln. Projektion på x -axeln ger

$$M_x = \mathbf{e}_x \cdot \left((3\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)aR \times \left(-\frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{e}_y + \frac{4}{\sqrt{34}}\mathbf{e}_z \right) - \frac{3}{2}a\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \right) = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{24R}{\sqrt{34}} - \frac{3}{2}mg \Rightarrow R = \frac{\sqrt{34}}{16}mg \quad (7)$$



2



a) Vi antar att friktionskraftens normalkomponent (i riktningen \mathbf{e}_n) är noll och att krafterna är riktade enligt figur 1. Enligt figur 2 ger kraftjämvikt i riktningen normalt mot planet:

$$N = \cos \beta mg . \quad (8)$$

och friktionkraften är således

$$F_{fr} = \mu \cos \beta mg . \quad (9)$$

Den kinesiska energin är lika stor i B som i A . Lagen om den kinesiska energin ger därför

$$0 = U_{A-B}^{fr} + U_{A-B}^g, \quad (10)$$

där

$$U_{A-B}^{fr} = -\pi l F r = -\pi l \mu \cos \beta m g \quad (11)$$

är friktionskraftens arbete och

$$U_{A-B}^g = 2l \sin \beta m g \quad (12)$$

är tyngdkraftens arbete. Alltså fås

$$-\pi l \mu \cos \beta m g + 2L \sin \beta m g = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2 \tan \beta}{\pi} \quad (13)$$

b) Om vi tillämpar Newtons andra lag i \mathbf{e}_n -led får vi (se figur 2)

$$m \frac{v_o^2}{l} = S_A + m g \sin \beta \Rightarrow S_A = m \frac{v_o^2}{l} - m g \sin \beta, \quad (14)$$

$$m \frac{v_o^2}{l} = S_B - m g \sin \beta \Rightarrow S_B = m \frac{v_o^2}{l} + m g \sin \beta \quad (15)$$

3. Med x -axeln riktad nedåt som i figuren fås

$$m \ddot{x} = -kx + mg \Rightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = g, \quad (16)$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Ekvation (16) har lösningen

$$x = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}. \quad (17)$$

Begynnelsevillkoren är

$$x(0) = \delta, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (18)$$

vilket ger

$$\delta = B + \frac{mg}{k} \Rightarrow B = \delta - \frac{mg}{k} \quad (19)$$

$$0 = A, \quad (20)$$

och lösningen

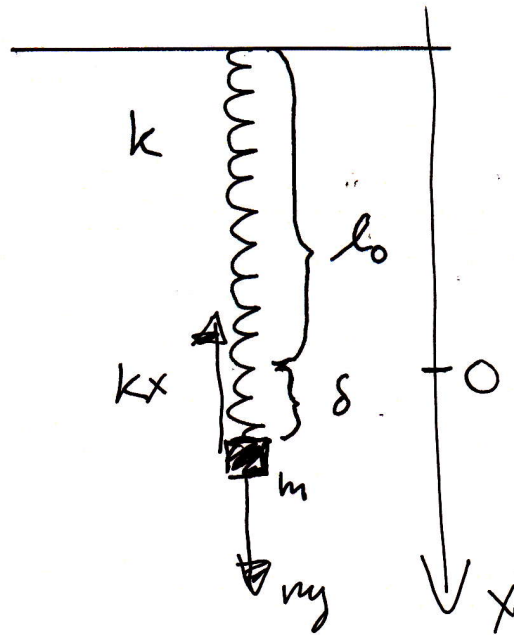
$$x(t) = \left(\delta - \frac{mg}{k}\right) \cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}. \quad (21)$$

Partikelns hastighet blir således

$$\dot{x}(t) = -\omega_n \left(\delta - \frac{mg}{k}\right) \sin(\omega_n t). \quad (22)$$

Efter en fjärdedels period är $t = \tau_n/4 = \pi/(2\omega_n)$. Då är partikelns hastighet

$$\dot{x} = -\omega_n \left(\delta - \frac{mg}{k}\right) \sin(\pi/2) = -\sqrt{\frac{k}{m}} \delta + \sqrt{\frac{m}{k}} g \quad (23)$$



4.

a) Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$v_A r_A = v_0 R \cos \alpha \Rightarrow v_A = \frac{R \cos \alpha}{r_A} v_0. \quad (24)$$

Energins bevarande ger

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{m g R^2}{R} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{m g R^2}{r_A} \Rightarrow \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} g R - g R = \frac{g R^3 \cos^2 \alpha}{2 r_A^2} - \frac{g R^2}{r_A} \Rightarrow r_A^2 - 2 R r_A + \cos^2 \alpha R^2 = 0, \quad (26)$$

där vi utnyttjat att $v_0^2 = g R$. Andragradsekvationen har lösningen

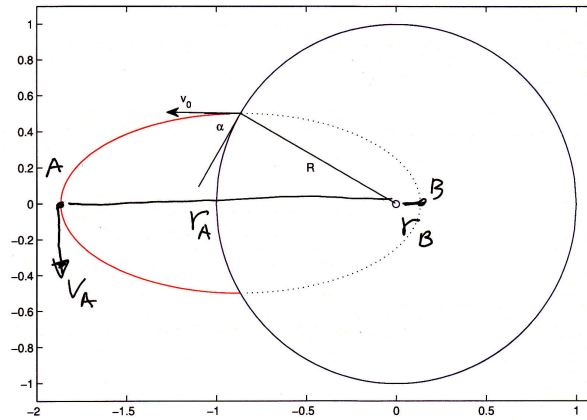
$$r_A = R \pm \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \alpha} = R(1 \pm \sin \alpha). \quad (27)$$

Eftersom $r_A > R$ måste vi välja lösningen

$$r_A = (1 + \sin \alpha) R. \quad (28)$$

Antag att all jordens massa hade varit koncentrerad i en punkt. Då hade missilen fullbordat ett helt varv och samma villkor hade gällt för punkten B som för punkten A . Alltså ger den andra lösningen av andragradsekvationen avståndet till punkt B :

$$r_B = (1 - \sin \alpha) R. \quad (29)$$



b) Närmaste avstånd fås då $\theta = 0$ och avståndet längst bort fås då $\theta = \pi$ i ekvationen

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (30)$$

Detta ger

$$R(1 - \sin \alpha) = a(1 - e) \quad (31)$$

$$R(1 + \sin \alpha) = a(1 + e). \quad (32)$$

Detta ger

$$a = R \quad (33)$$

$$e = \sin \alpha \quad (34)$$