KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
måndag, 8 juni 2017

1. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+y+2z \\ 4x+3y+2z \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm standardmatrisen till avbildningen T. **(1 p)**
(b) Bestäm en bas för nollrummet till T. **(3 p)**
(c) Bestäm dimensionen av bildrummet till T. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi kan skriva

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+y+2z \\ 4x+3y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Således är standardmatrisen till avbildningen T

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x+2y&=0 \\ x+y+2z&=0 \\ 4x+3y+2z&=0 \end{aligned},$$

vilket ger en totalmatris (med utelämnat högerled eftersom det är lika med noll)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$R2 - \frac{1}{3}R1$ och $R3 - \frac{4}{3}R1$ ger

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$R3 - R2$ ger tillslut

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi parametriserar lösningen genom att sätta $z = s$ och får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En bas för bildrummet blir således

$$\left\{ \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Dimensionssatsen säger oss att dimensionen av nollrummet plus dimensionen av bildrummet är lika med dimensionen av definitionsmängden, i detta fall 3. Således är dimensionen av bildrummet lika med 2.

2. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A. **(3 p)**

(b) Bestäm en matris U och en diagonal matris D sådant att $A = UDU^{-1}$. **(1 p)**

(c) Beräkna $A^{123} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Det karakteristiska polynomet är

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 18 = \lambda^2 + \lambda - 20.$$

Alltså är egenvärdena $\lambda_1 = -5$ och $\lambda_2 = 4$. Vi söker nu motsvarande egenvektorer. För $\lambda_1 = -5$ beräknar vi:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

och vi ser att $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ är i lösningsrummet, d.v.s. att $\vec{v}_1$ är egenvektor till λ_1.

För $\lambda_2 = 4$ beräknar vi:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

och vi ser att $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ är i lösningsrummet, d.v.s. att $\vec{v}_2$ är egenvektor till λ_2.

(b) Matrisen D utgörs av egenvärdena och matrisen U utgörs av egenvektorerna:

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan verifiera att det stämmer genom att beräkna

$$U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} U^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vektorn $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ är en egenvektor till egenvärdet $\lambda_1 = -5$. Därav

$$A^{123} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1^{123} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-5)^{123} \\ (-5)^{123} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^{123} \\ -5^{123} \end{bmatrix}$$

3. Betrakta två linjer i $\mathbb{R}^3$: L_1 som ges av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och L_2 som går genom punkterna $(-1, -1, 2)$ och $(1, b, 1)$, där b är ett konstant tal.

(a) Bestäm alla värden på b så att L_1 och L_2 skär varandra. . **(3 p)**
(b) Bestäm en ekvation av planet som innehåller L_1 och L_2 för $b = 1$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) En skärningspunkt är en gemensam punkt för bägge linjerna. Vi sätter således uttrycken för linjerna lika. Linje L_2 har ekvation

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ b-1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi får således att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ b-1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som med lite omskrivning medför att

$$\begin{bmatrix} 2 = t + 2s \\ 2 = -t + s(b+1) \\ -1 = t - s \end{bmatrix}$$

vilket har lösningarna $s = b = 1, t = 0$.

(b) Vi har punkten $(1, 1, 1)$ och två vektorer i planet, dvs vektorerna $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vi beräknar normalens ekvation genom att ta $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vi får att planets ekvation får formen $x - 3y - 4z = D$. Genom att sätta in punkten $(1, 1, 1)$ i planets ekvation fås att planets ekvation blir $x - 3y - 4z = -6$.

4. Den kvadratiska formen Q ges av $Q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - xy + y^2$.

(a) Ange den symmetriska matris som tillhör Q. **(1 p)**
(b) Låt $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Ange den matris som tillhör Q i bas $\mathcal{B}$. **(3 p)**
(c) Avgör karaktären av Q: positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Den symmetriska matris som tillhör Q är

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Lå $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Eftersom kolonnerna har längd 1 och är ortogonala, så är U en ortogonal matris, vilket innebär att $U^{-1} = U^T$. Matrisen med avseende på basen $\mathcal{B}$ ges av

$$\begin{aligned} USU^{-1} = USU^T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Den sökta basen består av egenvektorer till S. Först bestämmer vi matrisens egenvärden:

$$\det(S-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1/2 \\ -1/2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1/4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 3/2$$

För $\lambda_1 = 1/2$ har vi

$$\begin{bmatrix} (1-1/2) & -1/2 \\ -1/2 & (1-1/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Härav väljer vi en basvektor, till ex. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

På samma sätt, för $\lambda_2 = 3/2$ har vi

$$\begin{bmatrix} (1-3/2) & -1/2 \\ -1/2 & (1-3/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Härav väljer vi andra basvektor, till ex. $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Den sökta basen består av vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Eftersom alla egenvärden till S är positiva så är Q en positivt definit kvadratisk form.

5. Låt $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en godtycklig, men inte specifierad linjär avbildning.

(a) Visa att dimensionen av bildrummet $\operatorname{Im}(L)$ av L är högst 2. **(1 p)**

(b) Låt $\vec{b}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ligger utanför bildrummet $\operatorname{Im}(L)$. Beskriv hur man bestämmer de vektorer $\vec{x}$ som minimerar $\|L(\vec{x})-\vec{b}\|$. **(2 p)**

(c) Tillämpa b) för att hitta minsta värdet av $\|L(\vec{x})-\vec{b}\|$, då $L(\vec{x}) = (x_1, -x_2, x_1+x_2)$, och $\vec{b} = (1,2,3)$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Enligt rangsatsen är $2 = \operatorname{rank}(L) + \operatorname{nullity}(L)$, alltså är rangen högst 2. Rangen är definierad som bildrummets dimension.

(b) Ekvationssystemet enligt minstakvadratmetoden ges av

$$A^T A x = A^T b,$$

där A är standardmatrisen till L, en 3×2-matris.

(c) Standardmatrisen till denna avbildning är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{därav } A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } A^t\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1-2R1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

och får $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_1 - 2\cdot\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{3}$. Vi får svaret genom att beräkna

$$A\vec{x}-\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Länden av denna vektor är

$$\|A\vec{x}-\vec{b}\| = \frac{1}{3}\sqrt{4^2+4^2+4^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

6. Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris.

(a) Bevisa att kolonnerna av A är ortonormala om och endast om A uppfyller ekvation $A^2 = I$. (Med I menas identitetsmatrisen). **(2 p)**

(b) Bevisa att om $A^{1246} = I$, så är $A^2 = I$. **(4 p)**

Lösningsförslag.

(a) Kolonnerna av A är ortonormala om och endast om A är en ortogonal matris, d.v.s. $AA^T = I$. Eftersom A är symmetrisk, så är $A = A^T$. Alltså är A ortogonal om och endast om $A^2 = I$.

(b) Antag att $A^{1246} = I$. Eftersom A är symmetrisk så kan A ortogonalt diagonaliseras: $P^{-1}AP = D$ där P är en ortogonal matris och D är en diagonal matris. Eftersom $A^{1246} = I$, får vi:

$$D^{1246} = (P^{-1}AP)^{1246} = P^{-1}A^{1246}P = P^{-1}IP = I$$

Det betyder att elementen på diagonalen i D uppfyller likheten $x^{1246} = 1$. Det betyder att D kan ha bara 1 eller -1 på diagonalen och därför $D^2 = I$. Sista likheten ges $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$.