Dipolsmuts – I 2001-10-26

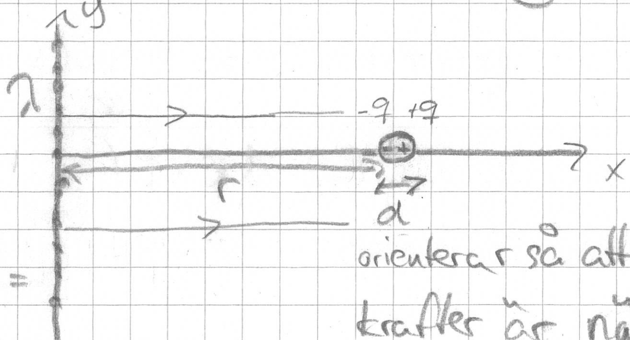
1 Givet: Smuts med dipolmoment $p = qd = 10^{-29}$ Cm som sitter fast med $F_{smuts} = 10^{-20}$ N och ska avlägsnas med ett fält $E = 10^5 \underset{= N/C}{V/m}$ från trådladdning ($E \propto 1/r$)

Sökt: Avstånd r från trådladdning för att kunna avlägsna smutsen ($F_E \approx F_{smuts}$)

F4 → trådladdning eller (2.3) i formelsamling:

(1) $$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \lambda \; [C/m] \text{ - laddningstäthet}$$

Kraften på dipolen ges av



orienterar så attraktiva krafter är närmast

$$F = F_- + F_+ = \{F = qE\} =$$

$$= -qE(r) + qE(r+d) = \frac{-q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (r+d)} =$$

$$= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{r}{r(r+d)} - \frac{(r+d)}{r(r+d)}\right)}_{\frac{-d}{r(r+d)}} = \frac{-qd\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r \underbrace{(r+d)}_{\approx r}} = \left\{\begin{matrix} d \ll r \\ p = qd \end{matrix}\right\} \approx \frac{-p\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2} =$$

$$= \{(1)\} = \frac{-pE}{r}$$

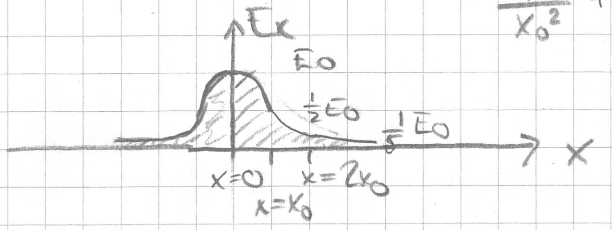
$E \approx 10^5$ V/m och $|F| = \frac{pE}{r} = F_{smuts} = 10^{-20}$ N

$$\Rightarrow \quad r = \frac{pE}{F_{smuts}} = \frac{10^{-29}\,Cm \cdot 10^5\,N/C}{10^{-20}\,N} = 10^{-4}\,m = \underline{\underline{0.1\,mm}}$$

Lysdiod - MT 1999-06-02

2 Givet: statiskt E-fält för lysdiod

$$E_x(x) = E_0 \frac{1}{\frac{x^2}{x_0^2}+1}, \quad x_0 = 3.0\,\mu m$$



Sökt: $\max(E_x(x)) = E_0$ (vid $x=0$) om spänningsfallet över x ska vara $U_x = \frac{W_x}{Q} = 1,2$ V

Spänning fås genom att integrera E_x längs x

$$U_x = \int_{x=-\infty}^{\infty} E_x\,dx = E_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x/x_0)^2+1}\,dx = \left\{\begin{matrix} y = \frac{x}{x_0} \\ dy = \frac{dx}{x_0} \end{matrix}\right\} = E_0 x_0 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2+1}\,dy =$$

$0 \to 0$
$\infty \to \infty$
$-\infty \to -\infty$

$$= E_0 x_0 2\int_0^{\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \left\{\begin{matrix} \text{BETA: p. 179}, \ a=2 \\ 7.5.\text{I}8: \ \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi}{a\sin\frac{\pi}{a}} \end{matrix}\right\} = E_0 x_0 \frac{\pi}{2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}} \cdot 2 = E_0 x_0 \pi$$

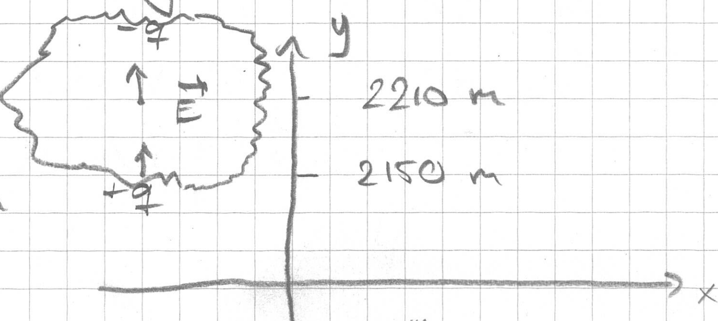
$$\Longrightarrow E_0 = \frac{U_x}{\pi x_0} = \frac{1,2\text{V}}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-6}\text{m}} = 1,27 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

Åskmoln - F 2011-?

Givet: Elektriska fältet på 2 höjder i åskmoln

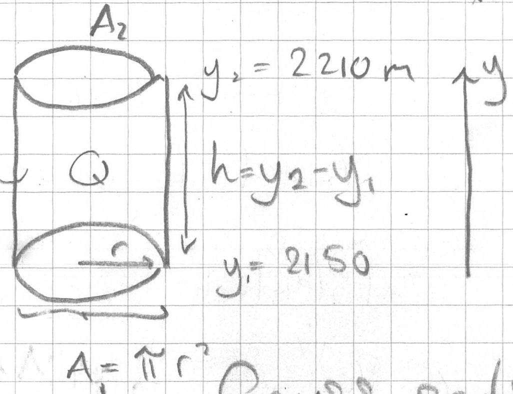
$|\vec{E}(y=2150\,m)| = 47.1\ kV/m$

$|\vec{E}(y=2210\,m)| = 36.4\ kV/m$



Sökt: Laddningstätheten ρ i molnet, där $\rho = \frac{Q}{V}$

Definera volymen V:



$A_m = 2\pi r h$

$V = 2A_s + A_m$

Q kan fås från $\vec{E}$ genom <u>Gauss sats:</u>

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Q - laddning innesluten i S

Anta: $\vec{E}$ vertikalt i hela S och således konstant över A_s. När $\vec{E}$ är vinkelrätt mot ytan är bidraget 0 ($\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$)

$\Rightarrow$ mantelytan A_m ger inget bidrag

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{A_m} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0} + \iint_{A_s} \vec{E}\cdot d\vec{S} = A_2E_2 - A_1E_1 =$$

$$\{A_2 = A_1 = A\} = A(E_2 - E_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

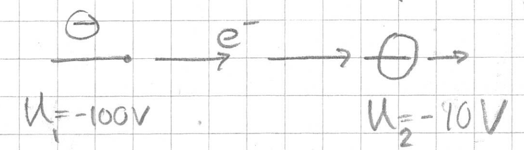
$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A(E_2-E_1)}{A\cdot(h_2-h_1)} = \varepsilon_0 \frac{(E_2-E_1)}{y_2-y_1} = 8.85\cdot 10^{-12}\cdot (36.4-47.1)\cdot 10^3/(2210-2150) = -1.58\cdot 10^{-9}\ C/m^3$$

$$\left[C^2/N{,}m^2 \cdot \overbrace{V/m}^{N/C} / m = C/m^3\right]$$

2.2 Etrauppgifter - övning 2

Bildrör 1 - MT 1998-05-28

1] Givet: elektroner färdas från en negativ elektrod på potentialen -100 V till en ringelektrod med potentialen -10 V. $\Rightarrow$ spänning $V = U_2 - U_1 = 90\,V$



Sökt: hastigheten v_2 vid ringelektroden

Anta: $v_1 = 0$, hela spänningsfallet omvandlas till kinetisk energi $E_V = E_{kin} = \frac{m v_2^2}{2}$

Potentiell energi från spänningsfallet

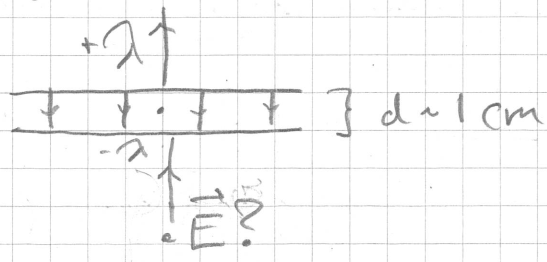
$$E_V = q_e V \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 q_e V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 90\,V}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,kg}} =$$

$$= \underline{\underline{5{,}6 \cdot 10^6\ m/s}}$$

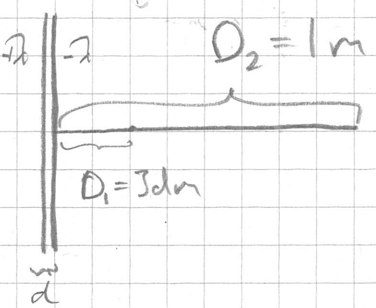
Dimensions koll: $\left[\sqrt{\frac{C \cdot V}{kg}} = \left\{ C \cdot V = J = m^2 kg/s^2 \right\} = \sqrt{\frac{m^2 \cancel{kg}}{s^2 \cancel{kg}}} = \frac{m}{s}\right]$ OK

Elstängsel - F 2007-06-04

$\boxed{4}$ Givet: trådar i sidled, alltså



Sökt: $\frac{E_1}{E_2}$



Trådladdning:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad [N/C = V/m] \qquad (2.3)$$

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \{r_1 = D+d\} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(D+d)}$$

$$E_- = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}$$

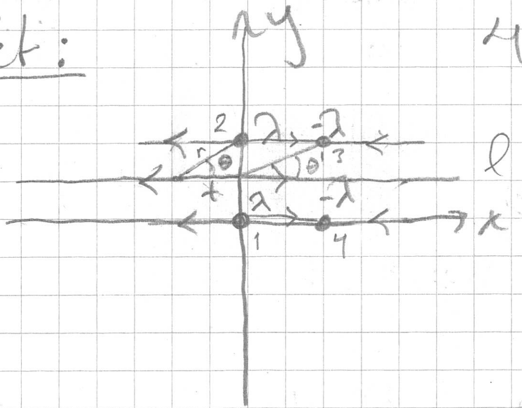
$$\Rightarrow E_{tot} = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(D+d)} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D} = \frac{\lambda 2\pi\varepsilon_0 D - \lambda 2\pi\varepsilon_0(D+d)}{(2\pi\varepsilon_0)^2 \underbrace{(D+d)}_{\approx D} D} =$$

$$= \frac{-\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 D^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{-\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 D_1^2}\cdot\left(\frac{-2\pi\varepsilon_0 D_2^2}{\lambda d}\right) = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \left(\frac{1}{0,3}\right)^2 = 11$$

MT1 2002-08-23 - rökgasrening

2 Givet: 4 trådladdningar



Sökt: plotta fältet utefter linjen $\ell = (t, 0{,}50, 0)$
varken linjen eller trådarna har något z-beroende

Trådladdning: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$ $\therefore \underline{E_z = 0}$

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

Alla laddningarna är symmetriska längs ℓ i y-riktningen
$\Longrightarrow \underline{E_y = 0}$

$r_1 = r_2 = \sqrt{t^2 + a^2}$

$r_3 = r_4 = \sqrt{(t-2a)^2 + a^2} = \sqrt{t^2 - 4ta + 5a^2}$

Sätt: $a = 0{,}5$ cm $= 0{,}005$ m

$\vec{e}_r$ för trådladdning pekar bort (eller) mot tråden, eftersom bara $E_x \neq 0$ måste vi ta x-komponenten av $E_x^+ = |\vec{E}| \cdot \cos\theta = |\vec{E}| \cdot \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}$

$\Longrightarrow E_+ = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2| = \frac{2 \cdot \lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{t^2+a^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} = \frac{\lambda t}{\pi\varepsilon_0(t^2+a^2)}$

p.s.s för $E_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\theta') = |\vec{E}| \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{(t-2a)^2+a^2}} = |\vec{E}| \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{t^2-4ta+5a^2}}$

$\Longrightarrow E_- = |\vec{E}_3 + \vec{E}_4| = \frac{-2\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{t^2-4ta+5a^2}} \cdot \frac{(t-2a)}{\sqrt{t^2-4ta+5a^2}} =$

$= \frac{\lambda(2a-t)}{\pi\varepsilon_0(t^2-4ta+5a^2)}$

$$\vec{E}_{tot} = (E_{tot}, 0, 0)$$

$$\Rightarrow E_{tot} = E_+ + E_- = \frac{\lambda t}{\pi\varepsilon_0(t^2+a^2)} + \frac{\lambda(2a-t)}{\pi\varepsilon_0(t^2-4at+5a^2)}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{t(t^2-4at+5a^2)+(2a-t)(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)(t^2-4at+5a^2)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{t^3} - \overset{2}{\cancel{4}}at^2 + \overset{4}{\cancel{5}}a^2t + \cancel{2at^2} - \cancel{t^3} + 2a^3 - \cancel{ta^2}}{(t^2+a^2)(t^2-4at+5a^2)} =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{4a^2t - 2at^2 + 2a^3}{(t^2+a^2)(t^2-4at+5a^2)}$$

$$-2a(t^2-2at-a^2) \qquad 1-\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} =$$

$$(t+a)(t-a)$$

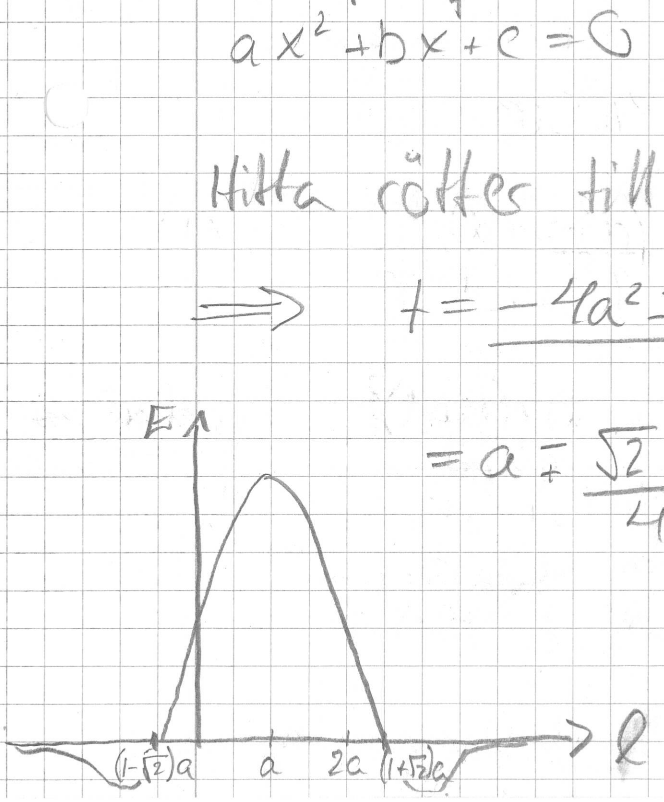
pq-formeln, BETA p. 64

$$x^2+px+q=0 \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hitta rötter till $\underbrace{-2a}_{a}t^2 + \underbrace{4a^2}_{b}t + \underbrace{2a^3}_{c}$

$$\Rightarrow t = \frac{-4a^2 \pm \sqrt{16a^4 + 8a \cdot 2a^3}}{-4a} = a \pm \frac{\sqrt{2 \cdot 16a^4}}{-4a} =$$

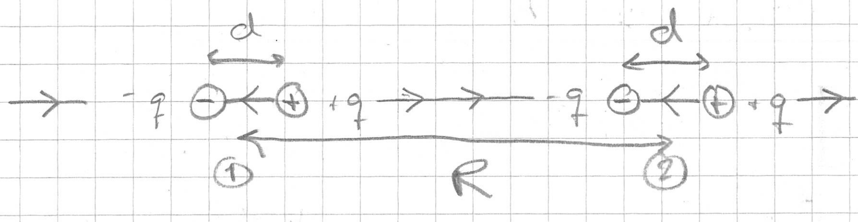


$$= a \mp \frac{\sqrt{2}\, 4a^2}{4a} = \boxed{a \mp \sqrt{2}\, a}$$

Dipolattraktion – FCL 2009-06-04

B1 Givet: fritt roterande dipoler som inte kan förflytta sina tyngdpunkter

Sökt: kraften mellan de två dipolerna som funktion av avståndet R



Dipol moment:

$\vec{p} = q\vec{d}$ (2.5)

Elektrisk kraft på laddning ges av:

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (2.7)$$

E-fält för punktladdning:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.2)$$

Summera bidrag i $R + \frac{d}{2}$ och $R - \frac{d}{2}$ för $+q$ och $-q$:

punktladdnings-

E_+ vid $+\frac{d}{2}$

$$E_+ = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (R-d)^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q(R-d)^2 - qR^2}{4\pi\varepsilon_0 (R-d)^2 R^2} =$$

$$= \frac{q(\cancel{R^2} - 2Rd + d^2 - \cancel{R^2})}{4\pi\varepsilon_0 (R-d)^2 R^2} = q\frac{(d^2 - 2Rd)}{4\pi\varepsilon_0 (R-d)^2 R^2} \qquad (1)$$

E_- vid $-\frac{d}{2}$

$$E_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R+d)^2} = \frac{qR^2 - q(R+d)^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2 (R+d)^2} =$$

$$= \frac{q(\cancel{R^2} - \cancel{R^2} - 2Rd - d^2)}{4\pi\varepsilon_0 R^2 (R+d)^2} = \frac{-q(d^2 + 2Rd)}{4\pi\varepsilon_0 R^2 (R+d)^2} \qquad (2)$$

Räkna ut kraften på ① från ② mha (1), (2) och (2.2):

$$F = qE_+ - qE_- = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d^2-2Rd}{(R-d)^2R^2} + \frac{d^2+2Rd}{(R+d)^2R^2}\right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\overbrace{(R+d)^2(d^2-2Rd)+(R-d)^2(d^2+2Rd)}^{T}}{(R-d)^2(R+d)^2R^2}\right] =$$

$$T = (R^2+2Rd+d^2)(d^2-2Rd)+(R^2-2Rd+d^2)(d^2+2Rd) =$$

$$= R^2d^2 - \cancel{2R^3d} + \cancel{2Rd^3} - 4R^2d^2 - \cancel{2Rd^3} + d^4 +$$

$$+ R^2d^2 + \cancel{2R^3d} - \cancel{2Rd^3} - 4R^2d^2 + \cancel{2Rd^3} + d^4 =$$

$$= 2R^2d^2 - 8R^2d^2 + 2d^8 = 2d^8 - 6R^2d^2 =$$

$$= 2d^2(d^6 - 3R^2) \approx \{R \gg d\} \approx -6d^2R^2$$

$$\left((d+R)(d-R) = d^2 - R^2 \right)$$

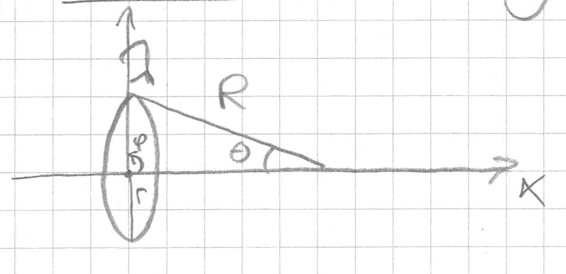
$$\Rightarrow F = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{3d^2}{(R-d)^2(R+d)^2} = \{p = qd\} = \frac{-3p^2}{2\pi\varepsilon_0(R-d)^2(R+d)^2} \approx$$

$$\approx \left\{\begin{matrix} R+d \approx R \\ R-d \approx R \end{matrix}\right\} \approx -\frac{3}{2\pi}\frac{p^2}{\varepsilon_0 R^4}$$

-2 annorlunda från facit, varför?

Ringladdning – TMI 2008-03-10

B3 Givet: Likformigt laddad ring



Symmetri i y-riktning gör att E pekar i x-riktningen

∴ behöver bara analysera x-komp. E_x

Sökt: var utmed x blir E störst?

uttryck $R(x,r) = \sqrt{x^2+r^2}$

Punktladdning: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (2.2)

I vår ring ger detta att dE från ett element ds motsvarar:

$$dE = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)}$$

dE pekar i R-riktningen

Ta x-komponenten av dE:

$$dE_x = dE\,\frac{x}{R} = \frac{\lambda x\, ds}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

Integrera längs ringen:

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{\lambda x\, ds}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}} = \left\{\begin{matrix} ds = r\,d\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda x r\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda x r}{2\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

, Derivera E_x m.a.p x för att hitta max:

$$\frac{dE_x}{dx} = \left\{ \begin{matrix} d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \text{BETA p. 137} \end{matrix} \right\} = \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r\cdot(x^2+r^2)^{3/2} - xr\,\frac{3}{2}(x^2+r^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+r^2)^3}\right]$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \implies r(x^2+r^2)^{3/2} - 3x^2r(x^2+r^2)^{1/2} =$$

$$= \underbrace{(x^2+r^2)^{1/2}}_{>0 \text{ om inte } x=r=0} \left[r(x^2+r^2) - 3x^2 r \right] = 0$$

$$\implies r(x^2+r^2) - 3x^2 r = x^2 + r^2 - 3x^2 = r^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = r^2$$

$$\implies \underline{\underline{x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}}}$$

max/min symmetriskt kring $x = 0$

skillnad mellan max och min är endast riktningen på E_x (pos eller neg. riktning)

sätt in eller plotta för att kolla max/min