SF1624 Algebra och geometri

Nionde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

2 februari, 2017

Repetition

- Matriser till linjära avbildningar: $f_A = L$ där kolonnerna i A är $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), \ldots, L(\vec{e}_n)$.
- Sammansättning svarar mot matrisprodukt

$$L \circ K(\vec{x}) = L(K(\vec{x})) = BA\vec{x}$$

- Rotation $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- Spegling $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

Dagens begrepp

- Bildrum - kolonnrum
- Nollrum - kärna
- Radrum
- Rangsatsen
- Inversmatris
- Invers avbildning

Bildrum

Definition (Bildrum)

Om $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning ges *bildrummet* till L av

$$\mathrm{Range}(L) = \{L(\vec{x}) \text{ där } \vec{x} \text{ ligger i } \mathbb{R}^n\}$$

Obs!

Vektorerna $\vec{y}$ i bildrummet är de vektorer där det finns lösning till $L(\vec{x}) = \vec{y}$, dvs

$$\mathrm{Range}(L) = \{\vec{y} \text{ i } \mathbb{R}^m \text{ där } \vec{y} = L(\vec{x}) \text{ för något } \vec{x} \text{ i } \mathbb{R}^n\}.$$

Sats

Bildrummet till en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är ett delrum av $\mathbb{R}^m$.

Kolonnrummet

Definition

Kolonnrummet till matrisen A är det linjära höljet av kolonnvektorerna i A och betecknas $\mathrm{Col}(A)$.

Sats

Om A är matrisen för $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ så är kolonnrummet till A lika med bildrummet till L, dvs

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Range}(L).$$

Bevis.

Bildrummet spänns upp av bilderna av standardbasvektorerna, dvs $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), \dots, L(\vec{e}_n)$, dvs av kolonnvektorerna i A. $\square$

Bildrum

Fråga

Låt $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ges av matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Bildrummet till L ges av

A. Hela $\mathbb{R}^3$.

B. Planet med ekvation $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

C. Linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. Nollvektorn.

Nollrum – kärna

Definition (Nollrum, kärna)

Nollrummet (eller *kärnan*) till en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är lösningsmängden till $L(\vec{x}) = \vec{0}$ och betecknas $\mathrm{Null}(L)$ eller $\ker(L)$. Alltså

$$\mathrm{Null}(A) = \{\vec{x} \text{ i } \mathbb{R}^n \text{ sådana att } L(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

Sats

Nollrummet till en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

Definition

$\mathrm{Nullity}(A)$ för en $m \times n$-matris A är dimensionen för nollrummet till motsvarande avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Nollrum

Fråga

Låt $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ges av matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollrummet till L ges av

A. Hela $\mathbb{R}^3$.

B. Planet med ekvation $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

C. Linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. Nollvektorn.

Rangsatsen

Sats

Om A är matrisen för en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = n$$

Bevis.

- $\operatorname{rank}(A)$ är antalet *bundna* variabler,
- $\operatorname{nullity}(A)$ är antalet *fria* variabler och
- n är *totala* antalet variabler

i ekvationssystemet

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

$\square$

Radrum

Definition

Radrummet för matrisen A är det linjära höljet av *radvektorerna* i A och betecknas $\text{Row}(A)$.

Fråga

Vad är dimensionen av $\text{Row}(A)$ *om* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *?*

A.	0	B.	1	C.	2	D.	3	E.	4

Inverterbar avbildning

Definition

En linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är *inverterbar* om det till *varje* $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^m$ finns en *unik* lösning till

$$L(\vec{x}) = \vec{y}.$$

Obs!

Samma sak gäller alla funktioner. Jämför med envariabelanalys. $f(x) = x^3$ är inverterbar, men inte $f(x) = x^2$.

Inverterbara funktioner

Fråga

Vilken av nedanstående funktioner är inverterbar?

A. $f(x) = \sin x$

B. $f(x) = \tan x$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = 2x + 3$

E. $f(x) = 1$

F. $f(x) = x^2$

G. $f(x) = \sqrt{x^2}$

Invers avbildning

Definition

Om $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är inverterbar finns en *invers avbildning* L^{-1} så att

$$L(L^{-1}(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{och} \quad L^{-1}(L(\vec{x})) = \vec{x}$$

för alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^m$.

Inversmatris

Definition

Vi säger att en $n \times n$-matris A är *inverterbar* om det finns en matris B så att

$$AB = I_n.$$

Matrisen B kallas för *inversmatris* till A och betecknas A^{-1}.

Sats

Matrisen A är inverterbar precis om motsvarande linjära avbildning $f_A \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är inverterbar.

Inverterbara matriser

Fråga

Vilka av följande påståenden är sanna för $n \times n$-matriser A?

A. *A är inverterbar om* $\operatorname{rank}(A) = n$.

B. *A är inverterbar om* $\operatorname{Col}(A) = \mathbb{R}^n$.

C. *A är inverterbar om* $\operatorname{Null}(A) = \{\vec{0}\}$.

A. Inget	B. Bara A	C. Bara B	D. Bara C
E. A och B	F. B och C	G. A och C	H. Alla tre

Att beräkna inversmatrisen

Sats

Om A är en inverterbar $n \times n$-matris ges den reducerade trappstegsformen av matrisen

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$$

av

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Exempel

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \text{[Gauss-Jordan]} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Inversmatris

Fråga

Inversen av matrisen $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ *ges av*
$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & x \end{bmatrix}$ *för något* x. *Vad är* x?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5