SF1624 Algebra och geometri

Åttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

1 februari, 2017

Repetition

- Matriser - $\mathbb{R}^{m\times n}$
  - addition $A + B$
  - multiplikation med skalär tA
- Matrismultiplikation ges av skalärprodukterna av *raderna* i A med *kolonnerna* i B.
- Matrisavbildningar $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$
- Linjära avbildningar *respekterar* addition och multiplikation med skalär.

Dagens begrepp

- Sammansättning
- Rotation
- Spegling

Karaktärisering av linjära avbildningar

Sats

För varje linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *finns en unik* $m \times n$*-matris* A *så att* $L = f_A$.

Bevis.

L respekterar linjärkombinationer, dvs

$$
\begin{aligned}
L(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) &= x_1 L(\vec{e}_1) + x_2 L(\vec{e}_2) + \cdots + x_n L(\vec{e}_n) \\
&= \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ L(\vec{e}_1) & L(\vec{e}_2) & \cdots & L(\vec{e}_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dvs A är matrisen med *kolonner* $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), \ldots, L(\vec{e}_n)$. $\square$

Rotation

Fråga

Rotation av vektorer i planet med ett kvarts varv moturs är en linjär avbildning, $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Vilken är matrisen A som ger $L = f_A$?

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

E. Ingen av ovanstående

Sammansättning

Definition

Om $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ och $K\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ kan vi definiera *sammansättningen*, $K \circ L$, som

$$K \circ L(\vec{x}) = K(L(\vec{x}))$$

för alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Sats

Om L och K är linjära avbildningar med matris A respektive B är sammansättningen $K \circ L$ linjär med matris BA.

Bevis.

$$K(L(\vec{x})) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$$

för alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$. $\square$

Rotation i planet

Rotation av planet med en vinkel θ är en linjär avbildning. Matrisen får vi av

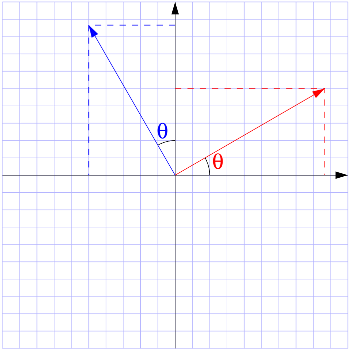
$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

och

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

Alltså är

$$A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$



Speglingar i planet

Om vi speglar i en linje som bildar en vinkel $\theta/2$ mot positiva x_1-axeln får vi

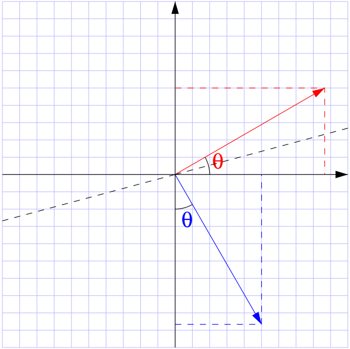
$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$$

och

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{bmatrix}$$

Alltså är matrisen

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\\sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}.$$



Spegling

Fråga

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

representerar en spegling i en linje i planet. Vilken linje?

A. Linjen med ekvation $3x_1 + 4x_2 = 0$.

B. Linjen med ekvation $4x_1 + 3x_2 = 0$.

C. Linjen med ekvation $4x_1 - 3x_2 = 0$.

D. Linjen med ekvation $3x_1 - 4x_2 = 0$.

E. Linjen med ekvation $x_1 + 2x_2 = 0$.

F. Linjen med ekvation $2x_1 + x_2 = 0$.

G. Linjen med ekvation $2x_1 - x_2 = 0$.

H. Linjen med ekvation $x_1 - 2x_2 = 0$.

Sammansättning av speglingar

Fråga

Låt L_1 vara speglingen i x_1-axeln och låt L_2 vara speglingen i linjen med ekvation $x_1 = x_2$. Vad är sammansättningen $L_1 \circ L_2$?

A. Rotation 90° medsols.
B. Rotation 90° motsols.
C. Rotation 45° medsols.
D. Rotation 45° motsols.
E. Speglingen i linjen $x_1 = -x_2$.
F. Speglingen i linjen $x_1 = x_2$.
G. Speglingen i x_1-axeln.
H. Speglingen i x_2-axeln.
I. Inget av ovanstående

Bildrum

Definition (Bildrum)

Om $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning ges *bildrummet* till L av

$$\text{Range}(L) = \{L(\vec{x}) \text{ där } \vec{x} \text{ ligger i } \mathbb{R}^n\}$$

Obs!

Vektorerna $\vec{y}$ i bildrummet är de vektorer där det finns lösning till $L(\vec{x}) = \vec{y}$, dvs

$$\text{Range}(L) = \{\vec{y} \text{ i } \mathbb{R}^m \text{ där } \vec{y} = L(\vec{x}) \text{ för något } \vec{x} \text{ i } \mathbb{R}^n\}.$$

Sats

Bildrummet till en linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är ett delrum av $\mathbb{R}^m$.

Kolonnrummet

Definition
Kolonnrummet till matrisen A är det linjära höljet av kolonnvektorerna i A och betecknas $\mathrm{Col}(A)$.

Sats
Om A är matrisen för $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ så är kolonnrummet till A lika med bildrummet till L, dvs

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Range}(L).$$

Bevis.
Bildrummet spänns upp av bilderna av standardbasvektorerna, dvs $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), \ldots, L(\vec{e}_n)$, dvs av kolonnvektorerna i A. $\square$

Bildrum

Fråga

Låt $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *ges av matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Bildrummet till L ges av

A. Hela $\mathbb{R}^3$.

B. Planet med ekvation $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

C. Linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. Nollvektorn.