SF1624 Algebra och geometri

Sjunde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

31 januari, 2017

Repetition

- Gausselimination för lösning av linjära ekvationssystem - (reducerad) trappstegsform
- Delrum i $\mathbb{R}^n$
  - Linjärt hölje
  - Lösningar av homogena linjära ekvationssystem
- Linjärt beroende och oberoende
- Baser för delrum

Dagens begrepp

- Matriser - $\mathbb{R}^{m \times n}$
  - addition
  - multiplikation med skalär
- Matrismultiplikation
- Matrisavbildningar
- Linjära avbildningar

Matriser

Definition

Beteckna med $\mathbb{R}^{m \times n}$ mängden av alla $m \times n$-matriser, dvs uppställningar av $m \cdot n$ reella tal m *rader* och n *kolonner*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Obs!

$\mathbb{R}^{m \times n}$ fungerar precis som $\mathbb{R}^{mn}$ och vi har *komponentvis*

- addition
- multiplikation med skalär

Bas för $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Fråga

Vilka av dessa

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^{2\times 2}$*?*

A. Ingen	B. Bara $\mathcal{B}$	C. Bara $\mathcal{C}$	D. Bara $\mathcal{D}$
E. $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$	F. $\mathcal{B}$ och $\mathcal{D}$	G. $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$	H. Alla tre

Transponat

Definition

Transponatet, A^T, av matrisen A fås genom att byta roll för rader och kolonner, dvs

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Exempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation

Definition

Produkten av matriserna A och B ges av en matris som består av alla skalärprodukter av *rader* i A med *kolonner* i B:

$$(AB)_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j$$

där $\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \ldots, \vec{a}_m^T$ är raderna i A och $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ är kolonnerna i B.

Exempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}$$

Obs!

<u>Rad</u>vektorerna i A måste ha *lika många komponenter* som <u>kolonn</u>vektorerna i B.

Matrismultiplikation

Fråga

Om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \textit{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

så är produkten AB en . . . .

A. 2×2-matris B. 2×3-matris C. 2×4-matris

D. 3×2-matris E. 3×3-matris F. 3×4-matris

G. 4×2-matris H. 4×3-matris I. 4×4-matris

Räkneregler

Matrismultiplikation uppfyller de flesta *naturliga räknelagar* som tex

- $A(BC) = (AB)C$ (Associativitet)
- $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivitet)
- $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivitet)

…men *inte* kommutativitet

Obs!

Även om både AB och BA är definierade och lika stora gäller oftast

$$AB \neq BA.$$

Exempel

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisavbildning

Definition

En $m \times n$-matris A ger oss en *funktion* $f_A \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ genom

$$f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Exempel

Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ så ges $f_A \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ av

$$f_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & + & 2x_2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

Linjäritet

Sats

En matrisavbildning $f_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ respekterar addition och multiplikation med skalär, dvs

- $f_A(\vec{x}+\vec{y}) = f_A(\vec{x}) + f_A(\vec{y})$
- $f_A(t\vec{x}) = t\, f_A(\vec{x})$

för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalärer t.

Definition

En avbildning (funktion) $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är *linjär* om

- $L(\vec{x}+\vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$
- $L(t\vec{x}) = t\, L(\vec{x})$

för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalärer t.

Linjäritet

Fråga

Vilken av följande funktioner är linjär?

A. $f(x) = \sin(x)$
B. $f(x) = 2x + 3$
C. $f(x) = \pi x$
D. $f(x) = x^2$
E. $f(x) = 1$
F. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
G. Ingen av dem