SF1624 Algebra och geometri

Sjätte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

25 januari, 2017

Repetition

- Ett *delrum* i $\mathbb{R}^n$ är *slutet* under
  - *addition* $\vec{x}+\vec{y} \in V$ om $\vec{x}, \vec{y} \in V$
  - *multiplikation med skalär* $a\vec{x} \in V$ om $\vec{x} \in V$ och $a \in \mathbb{R}$
- Lösningsmängder till *homogena* linjära ekvationssystem är delrum.
- Det *linjära höljet* är ett delrum som består av alla *linjärkombinationer*

$$\begin{aligned}\text{Span}\,\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \\ = \{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k, t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Dagens begrepp

- Linjärt beroende och oberoende
- Baser för delrum
- Dimension

Linjärt beroende

Definition

Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ är *linjärt beroende* om

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

för skalärer $t_1, t_2, \ldots, t_k$ som inte alla är noll.

Obs!

Vektorekvationen

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

är ett *homogent* linjärt ekvationssystem i variablerna $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Linjärt beroende

Fråga

Vilket av följande påståenden är inte sant?

A. Två parallella vektorer är linjärt beroende
B. Varje mängd som innehåller $\vec{0}$ är linjärt beroende
C. En delmängd av en linjärt beroende mängd är linjärt beroende
D. Unionen av två linjärt beroende mängder är linjärt beroende
E. Tre vektorer i ett plan är alltid linjärt beroende

Linjärt oberoende

Definition

Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ är *linjärt oberoende* om

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

innebär att $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$.

Obs!

Vektorerna är linjärt oberoende om det homogena linjära ekvationssystemet med vektorerna som kolonner i koefficientmatrisen *bara* har den triviala lösningen.

Obs! (Varför?)

Vi använder linjärt oberoende lösningar till ett homogent linjärt ekvationssystem för att minimera antalet parametrar.

Linjärt oberoende

Fråga

Vilket av följande påståenden är inte sant?

A. Två ortogonala nollskilda vektorer är linjärt oberoende
B. Unionen av två linjärt oberoende mängder är linjärt oberoende
C. En delmängd av en linjärt oberoende mängd är linjärt oberoende
D. Fler än två vektorer i ett plan är aldrig linjärt oberoende
E. Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende om trippelprodukten inte är noll

Baser

Definition

En *bas* för ett delrum $V \subseteq \mathbb{R}$ är en linjärt oberoende mängd $\mathfrak{B} = \text{Span}\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\right\}$ som spänner V, dvs

$$V = \text{Span}\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\right\}.$$

Sats

Om $\mathfrak{B} = \text{Span}\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\right\}$ är en bas för V kan varje vektor $\vec{v}$ skrivas som är linjärkombination av $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\right\}$ på ett unikt sätt, dvs

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{v}$$

har en unik lösning för varje $\vec{v}$ i V.

Baser

Fråga

Låt V vara lösningsmängden till det homgena linjära ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & -1 & 8 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Hur många vektorer finns i en bas för V?

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3	E. 4	F. 5	G. 6

Bas för plan

Fråga

Vilket av följande ger en bas för planet med ekvation $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$?

A. $\mathfrak{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

B. $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

C. $\mathfrak{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

D. $\mathfrak{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Dimension

Definition

Dimensionen för ett delrum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ är antalet vektorer i en bas för V.

Obs!

Om V är lösningsmängden för ett homogent linjärt ekvationssystem är $\dim V$ antalet *fria* variabler.

Lösningsmängdens olika karaktärer

Det finns tre huvudtyper av lösningsmängder vi kan få från ett linjärt ekvationssystem:

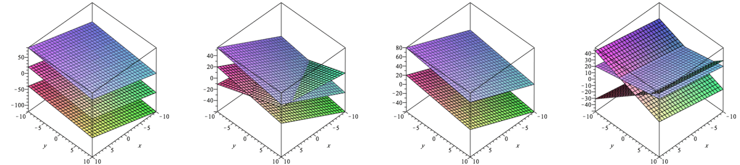
- En *unik lösning* – det finns precis en ledande etta för varje variabel. Ex: $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right]$.
- *Oändligt många* lösningar – vi inför en parameter för varje variabel som inte har ledande etta. Ex: $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
- *Inga lösningar* – ekvationssystemet är *inkonsistent* och har en ledande etta i högerledet. Ex: $\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right]$.

Definition (Dimension)

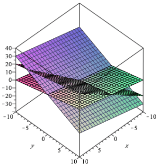
Om lösningsmängden är oändlig kan vi tala om dess *dimension* som ges av antalet parametrar i lösningen.

Möjligheter för tre ekvationer i tre variabler

Ingen lösning



En lösning



Oändligt många lösningar