SF1624 Algebra och geometri

Femte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

24 januari, 2017

Repetition

- *Linjära ekvationssystem* kan representeras av *totalmatriser*.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 3x & - & 4y & = & -1 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

- *Lösningsmängden* ändras inte vid *radoperationer*.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 - 3R_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right]$$

- *Gausselimination* är ett sätt att överföra matrisen på *trappstegsform* genom radoperationer.

Dagens begrepp

- Reducerad trappstegsform
- Rang
- Homogena linjära ekvationssystem
- Vektorer i $\mathbb{R}^n$
- Delrum i $\mathbb{R}^n$
- Linjärt hölje
- Linjärt beroende och oberoende

Reducerad trappstegsform

Definition

En matris är på *reducerad trappstegsform* om den är på trappstegsform och dessutom

- Första nollskilda element i varje rad är en *etta* och kallas *ledande etta*
- De ledande ettorna är de *enda* nollskilda elementen i sina kolonner.

Exempel

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rang

Definition

Rangen för en matris är antalet ledande ettor i den reducerade trappstegsformen för matrisen.

Fråga

Vad är rangen för matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3	E. 4	F. 5	G. 6

Homogena linjära ekvationssystem

Definition

Ett linjärt ekvationssystem kallas *homogent* om högerledet är noll.

- Ett homogent linjärt ekvationssystem har alltid *minst* en lösning $\vec{x} = \vec{0}$ som kallas den *triviala* lösningen.
- *Summan* av två lösningar är också en lösning!
- En *multipel* av en lösning är också en lösning!

Delrum i $\mathbb{R}^n$

Definition

Ett *delrum* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ är en icke-tom *delmängd* som uppfyller

- $\vec{x}, \vec{y} \in V \implies \vec{x} + \vec{y} \in V$
- $\vec{x} \in V, a \in \mathbb{R} \implies a\vec{x} \in V$

Fråga

Vilka av följande är delrum i $\mathbb{R}^3$?

X *Alla vektorer med heltalskoordinater*

Z *xy-planet*

Y *Unionen av koordinataxlarna*

A. Ingen	B. Bara X	C. Bara Y	D. Bara Z
E. X och Y	F. X och Z	G. Y och Z	H. Alla tre

Linjärt hölje

Definition

Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ kallas *det linjära höljet* av vektorerna och skrivs

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$$

Sats

Det linjära höljet av en mängd vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

Exempel

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Linjärt hölje

Fråga

Låt $V = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Vilket påstående är korrekt?

A. $V = \mathbb{R}^3$.

B. V är planet med ekvation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

C. V en linje genom origo.