SF1624 Algebra och geometri

Fjärde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

23 januari, 2017

Repetition

- *Vektorer* används vid geometriska problem i *planet* ($\mathbb{R}^2$) och *rummet* ($\mathbb{R}^3$)
- *Addition*, $\vec{x} + \vec{y}$, och *multiplikation med skalär*, $a\vec{x}$, sker *komponentvis*.
- *Skalärprodukten* $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos \theta$ ger en *skalär*.
- *Vektorprodukten*, eller *kryssprodukten*, $\vec{x} \times \vec{y}$ ger en *vektor*.
- *Projektionen* $\mathrm{proj}_{\vec{y}}\, \vec{x}$ är *parallell* med $\vec{y}$ och skillnaden $\vec{x} - \mathrm{proj}_{\vec{y}}\, \vec{x}$ är *ortogonal* mot $\vec{y}$.

$$\mathrm{proj}_{\vec{y}}\, \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{y} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$$

Kursnämnd

- Det finns en *kursnämnd* som består av
  - Natalie (natwes@kth.se)
  - Atahan (atahan@kth.se)

Prata med kursnämnden om det är något ni vill förbättra/förändra i kursen!

Dagens begrepp

- Linjära ekvationssystem
- Lösningsmängd
- Matrisrepresentation – totalmatris
- Elimination med radoperationer
- Trappstegsform
- Rang
- Homogena linjära ekvationssystem

Ekvationssystem

Fråga

Vilket ekvationssystem är linjärt?

A. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3^2 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{x_2} - 3x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 6|x_1| + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3\sqrt{x_3} = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - \sqrt{3}x_3 = 0 \end{cases}$

Linjära ekvationssystem i allmänhet

Definition (Linjärt ekvationssystem)

Ett linjärt ekvationssystem i n *obekanta* eller *variabler*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ går att skriva

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & +\cdots+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & +\cdots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

där $a_{i,j}$ och b_i är konstanter för $i = 1, 2, \ldots, m$ och $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exempel

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{och} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 5y & = & 3 \\ 3x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & -1 \end{array}\right.$$

Lösningar som vektorer

För lösningar med flera obekanta använder vi *vektorer* i $\mathbb{R}^n$, dvs n-tipler

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

Detta är en *lösning* om *alla* ekvationer är uppfyllda om $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.
För vektorer i $\mathbb{R}^n$ har vi *komponentvis*

- addition
- multiplikation med skalär

med samma räkneregler som vektorer i planet ($\mathbb{R}^2$) och rummet ($\mathbb{R}^3$).

Lösningsmängd

Fråga

Lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

ges av ...

A. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, där t är en reell parameter.

B. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Geometrisk tolkning

Fråga

Lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

kan tolkas som ...

A. Skärningen mellan två linjer i rummet.
B. Skärningen mellan två plan i rummet.
C. Unionen av två linjer i rummet.
D. Unionen av två plan i rummet.

Linjära ekvationssystem med matriser

Om vi kommer ihåg variabelnamnen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kan vi samla all information om ekvationssystemet i en *totalmatris*[1]:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

Exempel

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

---

[1] *augmented matrix* i boken

Lösningsmängd och radoperationer

- Det är *lösningsmängden* som är intressant och inte i ekvationerna i sig.
- Vi kan göra föjande operationer *utan att ändra* lösningsmängden:
  1. Addera en multipel av en ekvation till en annan,
  2. Multiplicera en ekvation med ett tal $a \neq 0$,
  3. Byta plats på två ekvationer.
- Motsvarande operationer på totalmatrisen kallar vi *radoperationer*.

Exempel

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - y - z &= 7 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ -5y + 5z &= 5 \end{cases}$$

$$\overset{2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ y - z &= -1 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z &= 3 \\ y - z &= -1 \end{cases}$$

Radoperationer

Fråga

Vad blir resultatet efter radoperationerna?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_2 - 3R_1 \end{array}$$

A. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & -12 \end{array}\right]$

B. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right]$

C. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & 12 \end{array}\right]$

D. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -12 \end{array}\right]$

Trappstegsform

Definition

En matris är på *trappstegsform* om det första nollskilda elementet på varje rad står längre till höger ju längre ned man kommer.

Fråga

Vilka av följande matriser är på trappstegsform?

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A. Bara X	A. Både X och Y	A. Ingen
B. Bara Y	B. Både X och Z	B. Alla tre
C. Bara Z	C. Både Y och Z	

Gausselimination

- Vi kan alltid omvandla en matris till trappstegsform genom *systematiska* radoperationer.
- Om vi arbetar uppifrån övre vänstra hörnet kallas detta *Gausselimination*

Fråga

Hur många radoperationer kan vi behöva göra om vi har börjar med en 100×200*-matris?*

A. c:a 100
B. c:a 5 000
C. c:a 50 000
D. c:a 100 000
E. c:a 200 000