SF1624 Algebra och geometri

Andra föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

18 januari, 2017

Repetition

- Vektorer i planet och rummet har *längd* och *riktning* och kan ges med *startpunkt* och *ändpunkt*
- Vi har *addition* av vektorer och *multiplikation med skälär*.
- Med hjälp av *standardbasen*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  får vi *koordinater* för vektorer: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$
- Addition och multiplikation med skalär kan nu göras *komponentvis* med koordinaterna.
- Addition tillsammans med multiplikation med skalär ger *linjärkombination*: $a\vec{x} + b\vec{y}, \quad a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

Multiplikation

Det finns två sorters multiplikation av vektorer:

- *skalärprodukt* - där produkten blir en *skalär*

$$\vec{x} \cdot \vec{y}$$

- *kryssprodukt* (eller *vektorprodukt*) - där produkten blir en *vektor*

$$\vec{x} \times \vec{y},$$

  men *bara* för vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Skalärprodukt

- *Skalärprodukten* av vektorerna $\vec{x}$ och $\vec{y}$ ges av

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\theta$$

  där θ är vinkeln mellan vektorerna $\vec{x}$ och $\vec{y}$.
- Resultatet är en *skalär*, dvs ett vanligt reellt tal.
- Skalärprodukten uppfyller några naturliga räknelagar :
  - $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ $\quad (\cos\theta = \cos(-\theta))$
  - $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$
  - $(a\vec{x}) \cdot \vec{y} = a\vec{x} \cdot \vec{y}$

Fråga om skalärprodukt

Fråga

Vad blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *?*

A. -3

B. $-\sqrt{2}$

C. -1

D. 0

E. 1

F. $\sqrt{2}$

G. 3

Skalärprodukt med koordinater

Med hjälp av räknelagarna kan skalärprodukten beräknas direkt från koordinaterna:

Sats

- *För vektorer i planet –* $\mathbb{R}^2$ *– gäller att*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

- *För vektorer i rummet –* $\mathbb{R}^3$ *– gäller att*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Speciellt fås *längden* av en vektor av :

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \qquad \left(= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ om } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^3\right)$$

Avstånd i $\mathbb{R}^3$

Fråga

Hur långt är det mellan punkterna $(4, 1, 5)$ *och* $(2, -1, 6)$ *i* $\mathbb{R}^3$*?*

A. 9

B. 5

C. -5

D. 3

E. Inget av ovanstående

Projektion

Om $\vec{x}$ är en vektor och L en linje kan vi dela upp $\vec{x}$ i en del $\vec{x}_L$ som är *parallell* med L och en del $\vec{x}_N$ som är *ortogonal* mot L.

$$\vec{x} = \vec{x}_L + \vec{x}_N$$

Vi räkna ut $\vec{x}_L$ genom

$$\vec{x}_L = \frac{\|\vec{x}\| \cos\theta}{\|\vec{y}\|}\vec{y}$$

där $\vec{y}$ är *parallell* med L och θ är vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$.

Fråga om projektion

Fråga

Vad blir projektionen av $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ *på linjen som har riktning* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$*?*

A. $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

F. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

G. $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

H. $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

I. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

J. Ingen av dessa

Projektion med skalärprodukt

Vi kan *projicera* en vektor $\vec{x}$ på en vektor $\vec{y}$ genom

$$\operatorname{proj}_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{\|\vec{x}\| \cos\theta}{\|\vec{y}\|} \vec{y}$$

där θ är vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$. Med *skalärprodukten* fås

$$\operatorname{proj}_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{y}$$

där allt fås från *koordinaterna* genom

$$\operatorname{proj}_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} .$$

om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Ortogonalitet

- Vektorer som är vinkelräta mot varandra brukar vi kalla *ortogonala*.
- Vi kan använda *skalärprodukten* för att kontrollera ortogonalitet:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$