SF1624 Algebra och geometri

Första föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

17 januari 2017

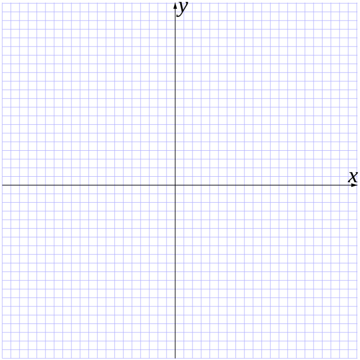
Från kursmålen för första veckan

Efter genomgången kurs ska studenten för godkänt betyg kunna

- Lösa geometriska problem i två och tre dimensioner med hjälp av exempelvis vektorer, skalärprodukt, vektorprodukt, trippelprodukt och projektion.

Planet och rummet

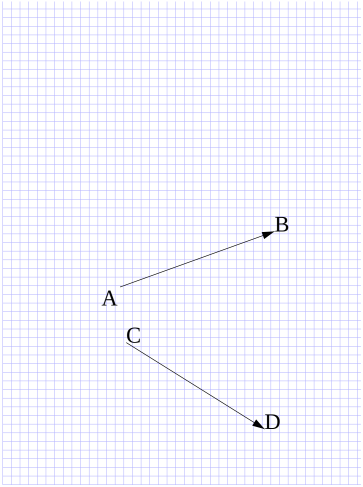
- För att beskriva punkter i planet eller rummet använder vi koordinater.
- För att få koordinater behöver vi ett origo och koordinataxlar.
- Vi väljer ofta koordinataxlarna vinkelräta mot varandra. (ortogonala)



Vektorer

Att räkna med vektorer har visat sig väldigt användbart inom många områden, exempelvis

- mekanik - att räkna med krafter
- elektricitetslära - att räkna med elektriska fält
- datorgrafik - att kunna beskriva geometriska objekt och hur ljuset speglas i dem



Geometriska vektorer

Vektorer i planet och rummet kan vi se som pilar mellan punkter.
Varje vektor $\vec{u}$ har

- en längd, som betecknas $|\vec{u}|$ eller $||\vec{u}||$
- en riktning - i vilken pilen pekar.

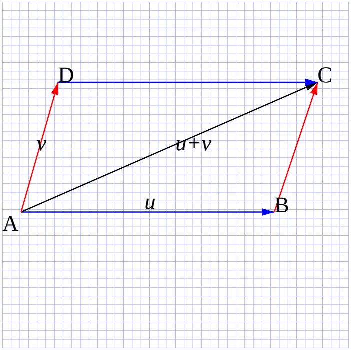
Vi kan också ge en vektor genom

- en startpunkt och
- en ändpunkt (spets).

Vektorer som har samma längd och samma riktning räknas som samma vektor. (Ekvivalenta)

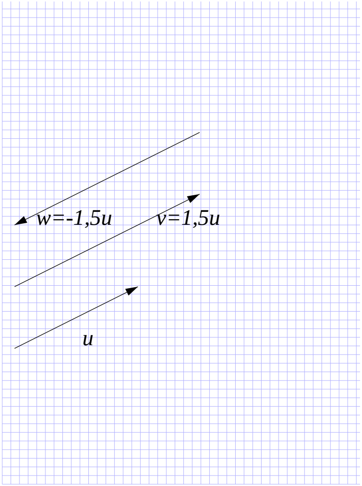
Addition av vektorer

- Vi kan addera vektorer genom att lägga dem efter varandra.
- Det är samma sak som att ta diagonalen i parallellogrammen de spänner.



Multiplikation med skalär

- De vanliga reella talen kallar vi för skalärer.
- Vi kan multiplicera med skalärer, a, genom
  - multiplicera längden med a om $a \geq 0$.
  - multiplicera längden med $-a$ och byt riktning om $a < 0$.



Räknelagar

Operationerna uppfylller några naturliga räknelagar:

- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$

Ortsvektorer

Om $P = (a, b, c)$ är en punkt i rummet och O är origo kallas vektorn från O till P för ortsvektorn till P och vi har

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Vi kan räkna ut koordinaterna för vektorn mellan P och Q om vi känner deras koordinater genom

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

eftersom

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}.$$

Linjärkombination

Genom att kombinera addition och multiplikation med skalär får vi linjärkombination av vektorer:

$$a\vec{u} + b\vec{v},$$

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

eller mer generellt

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$