SF1624 Algebra och geometri

Tredje föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

19 januari, 2017

Repetition

- *Skalärprodukten* av två vektorer är en *skalär* och ges av

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\theta,$$

där θ är vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$.
- I *koordinater* blir det

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

- Med *projektion* kan man dela upp en vektor $\vec{x}$ som

$$\vec{x} = \mathrm{proj}_{\vec{y}}\,\vec{x} + \mathrm{perp}_{\vec{y}}\,\vec{x}$$

där $\mathrm{proj}_{\vec{y}}\,\vec{x}$ är *parallell* med $\vec{y}$ och $\mathrm{perp}_{\vec{y}}\,\vec{x}$ är *ortogonal* mot $\vec{y}$, dvs *vinkelrät* mot $\vec{y}$.

Ortogonalitet

- Vektorer som är vinkelräta mot varandra brukar vi kalla *ortogonala*.
- Vi kan använda *skalärprodukten* för att kontrollera ortogonalitet:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Fråga om ortogonalitet

Fråga

Vilken av vektorna är ortogonal mot $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$*?*

A. $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

B. $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

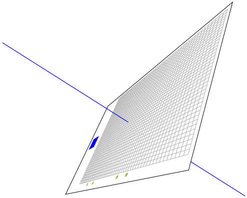
C. $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

E. Ingen av dessa

Plan i rummet

- För ett plan i rummet finns två enhetsvektorer som är ortogonala mot *alla* vektorer i planet.
- Nollskilda multipler av dessa kallas *normalvektorer* till planet.



Plan i rummet

Om P_o är en punkt i planet och $\vec{n}$ är en normalvektor till planet är

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

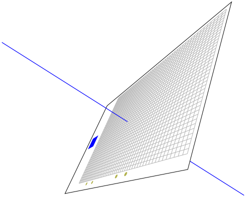
för alla punkter P i planet. Vi kan skriva det som

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n}$$

och om $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ får vi ekvationen

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

där $d = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n}$.



Fråga om normalvektor

Fråga

En normalvektor till planet $x_3 = 3x_1 - 2x_2 + 5$ *ges av*

A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

D. Ingen av dessa

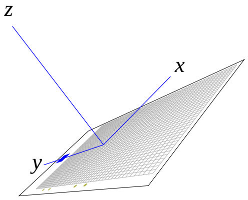
Vektorprodukt (kryssprodukt)

Den andra sortens multiplikation av vektorer är *vektorprodukten*, eller *kryssprodukten* som bara fungerar i rummet, dvs $\mathbb{R}^3$.

- $\vec{x} \times \vec{y}$ är *ortogonal* mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$.
- *Längden* ges av

  $$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\||\sin\theta|,$$

  där θ är vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$.
- *Riktningen* av $\vec{x} \times \vec{y}$ ges av att $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ bildar ett *högerorienterat* system.



Fråga om vektorprodukt

Fråga

Vad blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *?*

A. $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Räkneregler för vektorprodukt

Det går att se från definitionen att följande räkneregler är uppfyllda för vektorprodukten:

- $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
- $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
- $(a\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y})$

Obs!

I allmänhet är $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$.

Vektorprodukt från koordinater

Genom räknereglerna och att

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0$
- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{och} \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

kan vi uttrycka vektorprodukten i koordinaterna för vektorerna:

Sats

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *och* $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ *gäller att*

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Trippelprodukt

Om vi har tre vektorer i rummet, $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ kan vi bilda *trippelprodukten*

$$\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{y} \times \vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{z} \times \vec{x} \cdot \vec{y}$$

som är ett tal vars belopp är lika med volymen av *parallellepipeden* som spänns up av de tre vektorerna. Volymen av *tetraedern* som spänns upp av dem är

$$\frac{|\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}|}{6}.$$

Vi har också att

$$\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}, \vec{y} \text{ och } \vec{z} \text{ ligger i samma plan}$$