Sats [Inversa funktionssatsen]

Antag att $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ där $U \subset \mathbb{R}^n$ (öppen)

Vidare så antar vi att $(Df)_p$ är en inverterbar matris för något $p \in U$.

Då finns det ett område ~~M_δ kring $f(p)$~~ ~~så~~ $M_\delta(f(p)) \subset \mathbb{R}^n$ så att $f : \cancel{M_\delta(p)}\, V \to M_\delta(f(p))$ ~~V öppet kring f(p)~~ är inverterbar och $f^{-1} \in C^1(\cancel{M_\delta(f(p))}; M_\delta(p))$ ~~öppet kring f(p)~~ δ

V öppet område kring p.

Bevis: Tricket är att titta på

$$F(x,y) = f(x) - y \qquad \text{från } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Eftersom ~~Df~~ $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^n = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^n$

är inverterbar så finns det, enligt implicita funktionssatsen, en funktion $h(y)$ i en öppen omgivning $M_\delta(f(p))$ ~~av p~~ så att

$$F(h(y),y) = 0 \iff f(h(y)) - y = 0$$

Så $f \circ h = \mathrm{Id}$ för $y \in M_\delta(f(p))$

Vidare så är $h \in C^1$ ~~eftersom~~ enl. implicita funktionssatsen.

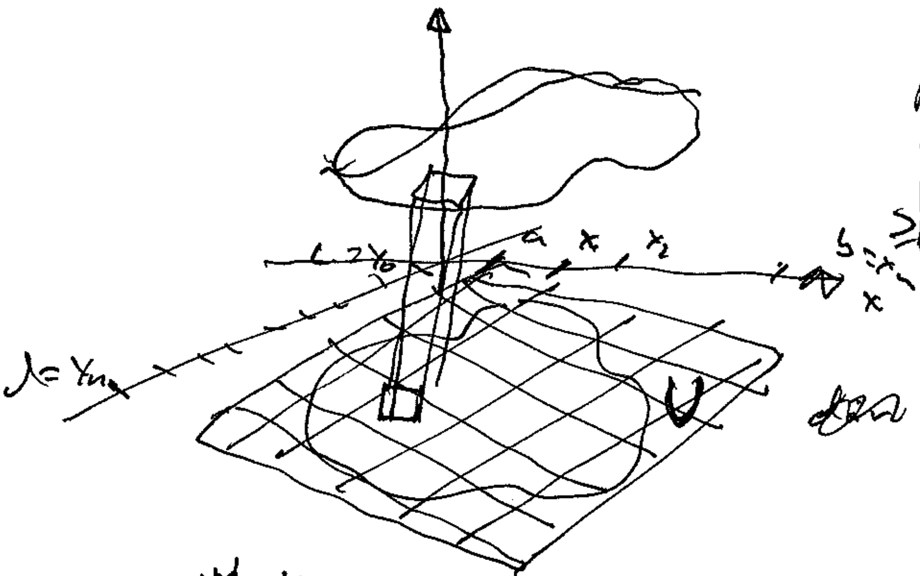
För att se att även $h \circ f = Id$ så argumenterar vi på samma sätt och hittar en invers g till h, $h \circ g = Id$ (på möjligen mindre områden), men då

$$f = f \circ Id = f \circ (h \circ g) = \underbrace{(f \circ h)}_{Id} \circ g = g.$$

så $h \circ g = h \circ f = Id$. ∎

Integralen i flera variabler.

Om vi vill beräkna volymen under grafen av $f \geq 0$, där f är definierad på $U \subset \mathbb{R}^2$, så är det naturliga att titta på approximationen



$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, \chi_{R_{ij}}$$

där $R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$

och $A_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$

Vi kan då skatta volymen under f med

$$L(f,G) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ R_{ij} \subset U}}^{m,n} A_{ij}\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

På samma sätt så kan vi skatta volymen från ovan med

$$U(f,G) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ R_{ij} \cap U \neq \emptyset}}^{m,n} B_{ij}\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

där $B_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij} \cap U} f(x,y)$.

Problemet med detta är att summationen

i U är över rektanglar $R_{ij} \cap U \neq \emptyset$

i L — " — $R_{ij} \subset U$.

Det är lite knepigt att behandla de fallen ~~sepa~~ så vi kommer att anta att

$U = [a,b] \times [c,d]$ (Jag gissar lite ...)

Vi kommer då att få väldefinierade summor utan bivillkor $R_{ij} \cap U \neq \emptyset$ och $R_{ij} \subset U$.

Kan titta på $f\chi_U$ då $U \subset \mathbb{R}$.