F26

Vi ska nu börja sammanfatta kursen, vilket inte är helt lätt.

Vad är kärnan i analysen?

Gränsvärden: Om vi har en kvantitet x och en funktion $f(x)$ så säger vi att $f(x)$ går mot ~~a~~ då x går mot x_0 om det för alla $\varepsilon > 0$ existerar ett δ så att

$|x - x_0| < \delta$ implicerar att $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Vi har flera abstrakta sätt att betrakta detta

1) Kontinuitet – ~~[illegible]~~ Funktioner som beter sig väl med gränsvärden.

2) Kompletthet – Mängden som fungerar väl med gränsvärden

3) Metriska rum – Abstraktion av "vanliga" gränsvärden i $\mathbb{R}$.

3) Metriska rum.

Det enda vi behöver för att prata om konvergens är en mängd punkter M och ett sätt att mäta avståndet mellan punkter.

Definition: Vi säger att ~~M~~ en mängd M är ett metriskt rum om det finns en funktion, en metrik, definierad $d : M^2 \to \mathbb{R}_+$ så att

i) $d(x,y) \geq 0$ och $d(x,y) = 0$ omm ~~[illegible]~~ $x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Exempel.

1) $\mathbb{R}$ med $d(x,y) = |x-y|$

2) $\mathbb{R}^n$ med $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$

3) $C^0(D)$ alla begränsade och kontinuerliga funktioner definierade på D, med metrik

$$d(f,g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|.$$

Problemet med konvergens är att definitionen kräver att man redan vet gränsvärdet. Vi definierar därför Cauchy konvergens

Definition: Vi säger att en följd $a_j \in M$ (metriskt rum) är ~~en~~ en Cauchy följd om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ så att

$$j, k > N \Rightarrow d(a_j, a_k) < \varepsilon.$$

Sats: Om $a_j \to a$ så är a_j Cauchy.

Bevis: ~~...~~ $a_j \to a \Rightarrow \exists N_{\varepsilon/2}$ s.t. $j, k > N \Rightarrow$

$j,k > N_{\varepsilon/2}$ $\quad d(a_j, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\overset{\text{Triangle}}{\Rightarrow} \quad d(a_j, a_k) \leq d(a_j, a) + d(a_k, a) < \varepsilon.$$

Man vill hitta omvändningen, men det gäller inte i alla rum, t.ex. så finns det Cauchy följder i $\mathbb{Q}$ som inte konvergerar, T.e.x $1, 1{,}4, 1{,}41, \ldots \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Så vi måste hitta ett över rum där alla Cauchy-följder konvergerar.

Dedekind Snitt: (Konstruktion av $\mathbb{R}$)

Tricket är att alla Cauchy följder konvergerar är ekvivalent med att alla mängder (begränsade från ovan och icke tomma) har en minsta övre begränsning.

Så vi behöver skapa en talmängd som innehåller $\mathbb{Q}$ och uppfyller

$\boxed{\text{KOMPLETHETS AXIOMET: Varje icke tom mängd begränsad från ovan har en minsta övre begränsning.}}$

Konstruktionen av de Reella talen går ut på att identifiera varje snitt.

Def: Snitt består av två mängder $A|B$ så

$$A \cup B = \mathbb{Q}, \quad a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$$

och A har inget största element.

Då kommer $S = \{A_\alpha | B_\alpha\}$ att ha en minsta övre begränsning $\bigcup_\alpha A_\alpha \Big| \bigcap_\alpha B_\alpha$.

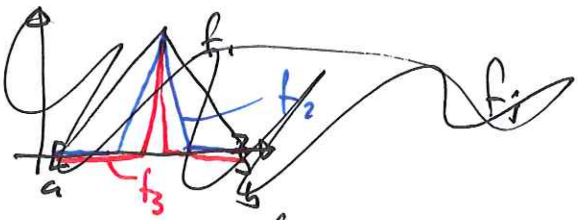
Här betyder $A|B \leq C|D$ om $A \subset C$ $D \subset B$.

Vi flyttar fokus från konvergensen till rummet där konvergensen sker!

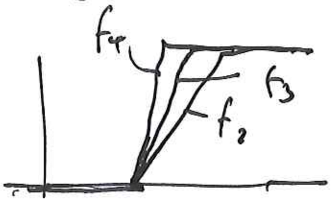
Frågan är om vi kan skapa kompletta rum, eller visa att rum av funktioner är kompletta.

Exempel: Låt M vara alla kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ kan vi hitta en metrik på M som gör M till ett komplett metriskt rum.

Exempel i exemplet: Om $d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ så blir M ett metriskt rum men inte komplett. T.ex.



$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ jx - \frac{j}{2} & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \\ 1 & \frac{1}{j} + \frac{1}{2} \le x \le 1 . \end{cases}$$



Det "rätta" metriken är supremum metriken

$$d(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

Sats: Om f_j är en följd av kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ och $\lim_{j\to\infty}\left[\sup_{x\in[a,b]} |f_j(x)-f(x)|\right] = 0$

då är $f(x)$ kontinuerlig

Bevis: Välj $\varepsilon > 0$ och låt j vara så stort att $\sup |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ och δ_ε vara så att

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon/3 .$$

Då kommer

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x) + (f(y) - f_j(y)) + (f_j(x) - f_j(y))| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_j(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f(y) - f_j(y)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_j(x) - f_j(y)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon .$$

$\boxtimes$

Likformig konv. bevarar även integralen under gränsövergången

Sats $f_j \rightrightarrows f$ implicerar att $\int_a^b f_j(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.
integrerbara.

Nästa steg är att försöka återskapa någon form av Bolzano-Weierstrass sats i metriska rum.

Definition: Vi säger att $K \subset M$ (M komplett metriskt rum) är kompakt om varje följd $a_j \in K$ har en konvergent delföljd $a_{j_k} \to a \in K$.

Sats: [Heine-Borel] $K \subset \mathbb{R}^n$ om och endast om K är sluten och begränsad.

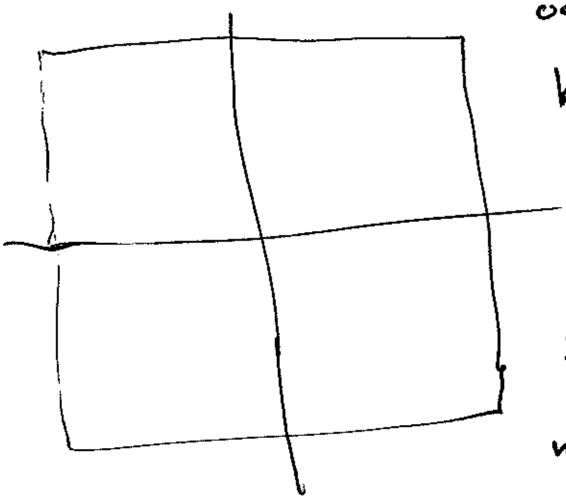
Bevis! Inte sluten $\Rightarrow$ $a_j \in K$ så $a_j \to a \notin K$

Inte begränsad $\Rightarrow$ $a_j \in K$ så att $d(a_j, a_1) > j$.

Om K är sluten och begränsad, säg att

$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x_j| \le M\}$ ~~dela~~ och $a_j \in K$. Dela

K i 2^n kuber en av dessa måste innehålla oändligt många a_j, säg kuben K_1 med sidlängd M, dela K_1 i 2^n kuber med sidlängd $M/2$ varav en, K_2, har oändligt många ... fortsätt att skapa kuber K_m med sidlängd $M/2^{m-1}$.



Välj ett a_j i varje kub (säg det lägsta j som inte valts tidigare) säg a_{j_k} då kommer

$$d(a_{j_k}, a_{j_\ell}) < 2^{n/2}\left(\frac{M}{2^{m-1}}\right) \quad \text{om} \quad a_{j_\ell}, a_{j_k} \in K_m.$$

så a_{j_k} bildar en Cauchy följd och därför en konvergent följd $a_{j_k} \to a_0$. Men $a_0 \in K$ eftersom K är sluten.

På liknande sätt vill vi ha kompakthet i $C([a,b])$

<u>Exempel</u>: Följden $f_n(x) = \cos(nx)$ är begränsad i $C^0([-\pi,\pi])$

men $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ existerar inte för någon delföljd $n_k \to \infty$.

<u>Definition</u>: Vi säger att en mängd $S \subset C^0([a,b])$ är ekvikontinuerlig om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att

$|x-y| < \delta$ och $f \in S$ så $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>Sats</u>: Låt S vara en begränsad och ekvikontinuerlig mängd i $C^0([a,b])$. Då ~~S kompakt~~. kommer varje följd $f_j \in S$ att ha en konvergent delföljd. Så om S är sluten så är S kompakt.

<u>Bevis</u>: Låt $x_k \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ så $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$

Då är $f_j(x_1)$ begränsad i $\mathbb{R}$ så konv. delföljd $f_{j_{1,k}}$

$f_{j_{1,k}}(x_2)$ begränsad så konv delföljd

j_k

$$\begin{array}{ccccccc}
j_{1,1} & j_{1,2} & j_{1,3}, & j_{1,4} & j_{1,5} & \cdots \\
j_{2,1} & j_{2,2} & j_{2,3} & j_{2,4} & j_{2,5} & \cdots \\
j_{3,1} & j_{3,2} & j_{3,3} & j_{3,4} & j_{3,5} & \\
j_{4,1} & j_{4,2} & j_{4,3} & j_{4,4} & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Då kommer $f_{j_k}(x_\ell)$ att konvergera för alla ℓ.

För $x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}$ så kan vi för varje $\varepsilon > 0$

hitta ett $x_\ell \in \mathbb{Q}$ så $|x - x_\ell| < \delta_\varepsilon$ och därför

$$\left|f_{j_k}(x) - f_{j_m}(x)\right| \le \underbrace{\left|f_{j_k}(x) - f_{j_k}(x_\ell)\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\left(f_{j_m}(x_\ell) - f_{j_m}(x)\right)\right|}_{<\varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\left|\left(f_{j_k}(x_\ell) - f_{j_m}(x_\ell)\right)\right|}_{<\varepsilon \text{ om } k,m > N \text{ då } f_{j_k}(x_\ell) \text{ konv.}}$$

$< 3\varepsilon$.

Så $f_{j_k}(x)$ är Cauchy för varje $x \in [a,b]$.

Så $f_{j_k}(x) \to f(x)$ punktvis.

Att visa att f är kont. är likanande som

att likformig konv. bevarar kontinuitet.

Möjligheten att approximera $x \in \mathbb{R}$ med $x_j \in \mathbb{Q}$ är extremt användbart och vi vill ofta approximera funktioner i ett komplett rum med element i ett rum som har bättre egenskaper i något avseende.

Sats [Weierstrass approximationssats]
Låt $f \in C^0([a,b])$ ~~och~~ $\varepsilon > 0$ då finns det ett polynom p så att $\sup_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

Bevis:

Steg 1. sätt
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right] & x \in [a,b] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Det räcker att approximera $\hat{f}$ med ett poly.

Steg 2: Låt
$$K_n(x) = \begin{cases} a_n (x-a)^n (b-x)^n & x \in [a,b] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

så $\int_a^b K_n(x)\,dx = 1$

Då kommer $K_n(x) \to 0$ likformigt för $|x - \frac{a+b}{2}| > \delta$

Steg 3: Definiera $P_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t) K_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_n(t-x)\,dt$

$= \int \qquad \qquad \to f(x).$

- - -

Sats: [Stone-Weierstrass] Om M är ett kompakt metriskt rum och $\mathcal{A}$ är en funktionsalgebra i $C^0(M)$ dvs

a) $f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow af + bg + cfg \in \mathcal{A}$ för $a, b, c \in \mathbb{R}$

och $\mathcal{A}$ separerar punkter

b) $x, y \in M \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A}$ $f(x) \neq f(y)$

c) $\mathcal{A}$ försvinner inte i någon punkt, dvs. $x \in M$ $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{A}$ så $f(x) \neq 0$.

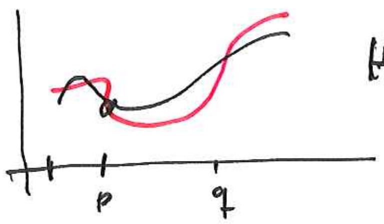
Då kommer $\mathcal{A}$ att vara tät i $C^0(M)$.

Bevis idée: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow p(f) \in \mathcal{A}$ för alla polynom p.

Detta medför att $|f|$ kan approximeras godtyckligt i $\mathcal{A}$. Så

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$ kan approximeras,

$$\inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$ — " —



$H_{pq}(x) > f(x) - \varepsilon$ i $\underbrace{(q-\delta, q+\delta)}$

open cover of M.

Finite subcover så $\max(H_{p,q_1}, H_{p,q_2}, \ldots, H_{p,q_n}) = H_p$

uppfyller $H_p > f - \varepsilon$.

Samma sak med $H_p \Rightarrow$

$\min(H_{p_1}, H_{p_2}, \ldots, H_{p_n}) < f + \varepsilon$ . .