F25

Vi har pratat om formen $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$

där en form $\omega(x) = \sum_I f_I \, dx_I = \sum_I f_I \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

och k-celler $e \in C_k(\mathbb{R}^n)$ avbildningar $(C^1(I^k))$

$$e : I^k \to \mathbb{R}^n.$$

~~Punkt.~~ Dessa är duala. dvs givet en $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$ och $e \in C_k(\mathbb{R}^n)$ så kan vi beräkna ett tal

$$\omega(e) = \int_{I_k} \sum_I f_I(e(u)) \frac{\partial e_I}{\partial u} \, du$$

som vi tolkar som integralen av formen ω över ytan $e(I^k)$.

Vi kommer att använda notationen

$$\omega(e) = \int_e \omega \qquad \left(= \int_{I^k} \sum_I f_I(e(u)) \frac{\partial e_I}{\partial u} \, du \right).$$

Idag ska vi härleda en partiell integrationsformel för ~~det~~ den här tolkningen av integralen: STOKES SATS.

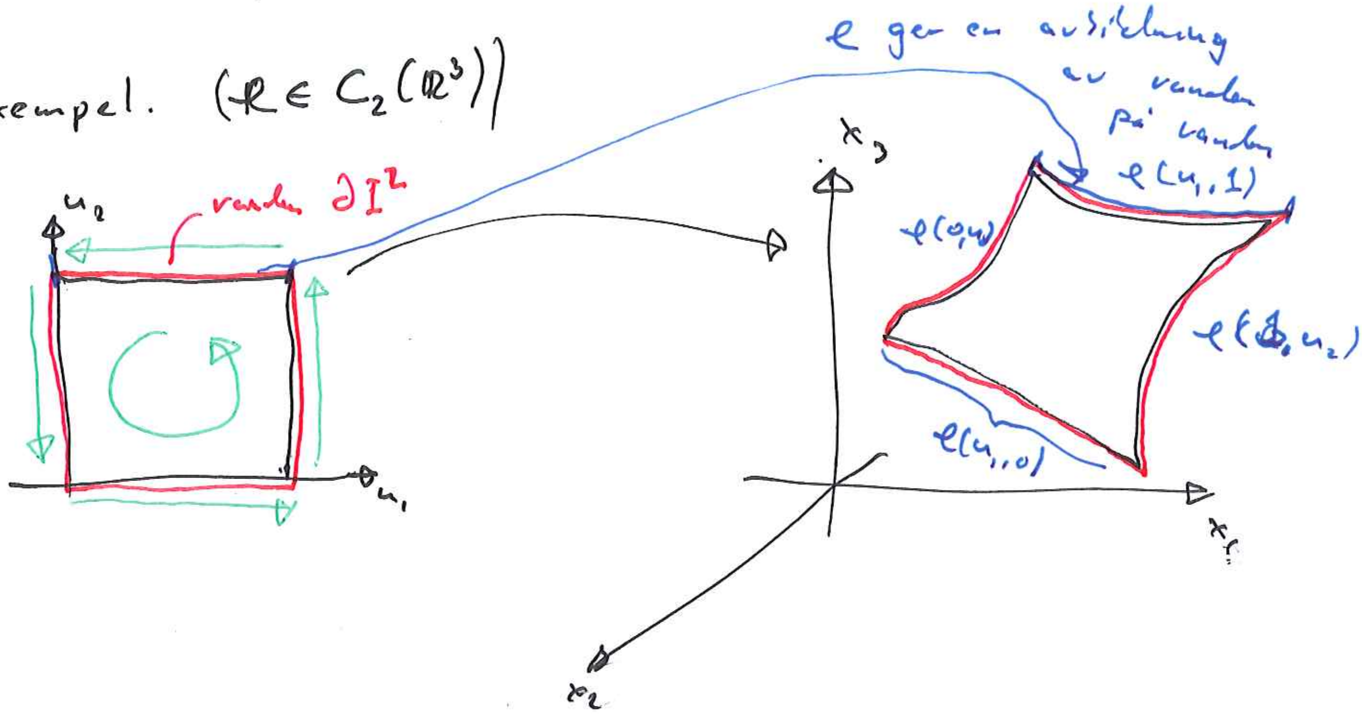
I 1-d kan man skriva precis det

$$\int_a^b \frac{\partial f(x)}{\partial x} \, dx = f(b) - f(a). \implies$$

Flyttar ~~dessa~~ integralen av en derivata till ~~en~~ information om värden på domänen..

För att kunna göra något liknande för formen ω och cellen ℓ så måste vi ha en definition av randen av cellen ℓ.

Exempel. ($\ell \in C_2(\mathbb{R}^3)$)



Randen i $\mathbb{R}^3$ ges av avbildningarna

$$\left.\begin{array}{ll} +\ell(u_1,0) & u_1 \in I = [0,1] \\ -\ell(u_1,1) & u_1 \in I \\ -\ell(0,u_2) & u_2 \in I \\ +\ell(1,u_2) & u_2 \in I \end{array}\right\} \text{Fyra 1-celler } C_1(\mathbb{R}^3)$$

Vi vill också hålla koll på orienteringen (ha $-f(a)$ och $+f(s)$)

Så vi skulle vilja att randen till $\ell(I)$ består av

$$-\ell(u_1,1) + \ell(u_1,0) + \ell(1,u_2) - \ell(0,u_2)$$

en summa av 1-former.

Definition: Vi säger att e är en k-kedja i $\mathbb{R}^n$ om
$$e = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \qquad \text{där} \quad e_j \in C_k(\mathbb{R}^n).$$

När vi betraktar en k-kedja så "glömmer vi bort" att e_j är funktioner. Vi tolkar på den rent formellt som en symbol där vi har a_1 stycken e_1, a_2 stycken e_2 etc. Men vi plussar kedjor på naturliga sättet.

Definition: Låt $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$ vara en k-form och $e = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j$ en k-kedja i $\mathbb{R}^n$. Då säger vi att integralen av ω över e är
$$\omega(e) = \int_e \omega = \sum_{j=1}^{N} a_j \underbrace{\int_{e_j} \omega}_{} = \sum_{j=1}^{N} a_j\, \omega(e_j)$$

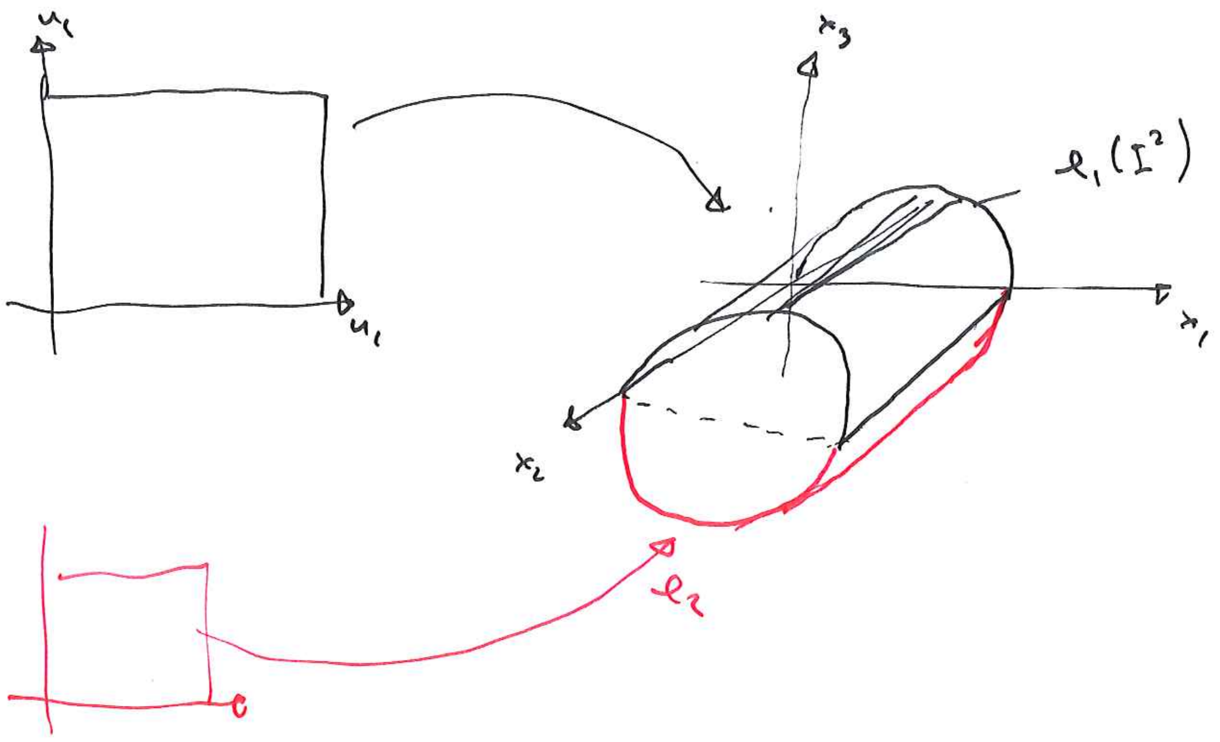
Detta är väldefinierat då e_j är en k-cell.

Exempel: Låt $e_1 \in C_2(\mathbb{R}^3)$, $e_2 \in C_2(\mathbb{R}^3)$ vara definierade enligt

$$e_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{\tfrac{1}{4} - (u-\tfrac{1}{2})^2}\right)$$

$$e_2(u,v) = \left(u, v, -\sqrt{\tfrac{1}{4} - (u-\tfrac{1}{2})^2}\right)$$

Då kommer



Så 2-kedjan $e_1 + e_2$ representerar en cylinder.

och om vi vill integrera en 2-form över cylindern så skall vi beräkna $\omega(e_1 + e_2)$.

<u>Definition:</u> Om $e \in C_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ så definierar vi

$$\partial e = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \left(e \circ \iota^{j,1} - e \circ \iota^{j,0} \right)$$

där $\iota^{j,1} : C_{k+1}(\mathbb{R}^n) \longmapsto C_k(\mathbb{R}^n)$, $\iota^{j,0} : C_{k+1}(\mathbb{R}^n) \longmapsto C_k(\mathbb{R}^n)$

$$\iota^{j,1}(e) = e(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, 1, u_{j+1}, \dots, u_{k+1})$$
$$\iota^{j,0}(e) = e(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_{k+1})$$

Operatorn ∂, eller rand operatorn, avbildar $(k+1)$-cellen e på k-kedjor.

Vi utvidgar definitionen till $(k+1)$ kedjor (singulärt)

∂ Om $e = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j$ är en $(k+1)$-kedja (dvs $e_j \in C_{k+1}(\Omega)$

så

$$\partial e = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial e_j .$$

Exempel (fortsättning)

Om vi har 2-kedjan $e_1 + e_2$ (som representerar cylindern)

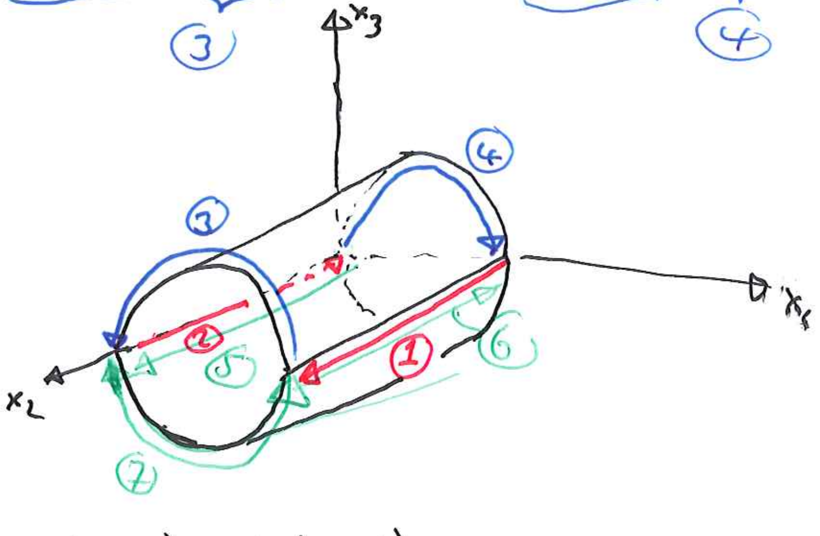
Då kommer

$$\partial(e_1 + e_2) = \partial e_1 + \partial e_2$$

$$\partial e_1 = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} \left(e_1 \circ i^{j,1} - e_1 \circ i^{j,0} \right) =$$

$$= e_1(1, u_2) - e_1(0, u_2) - e_1(u_1, 1) + e_1(u_1, 0) =$$

$$= \underbrace{(1, u_2, 0)}_{1} \underbrace{- (0, u_2, 0)}_{2} \underbrace{- \left(u_1, 1, \sqrt{\tfrac{1}{4} - (u_1 - \tfrac{1}{2})^2}\right)}_{3} + \underbrace{\left(u_1, 0, \sqrt{\tfrac{1}{4} - (u_1 - \tfrac{1}{2})^2}\right)}_{4}$$



På samma sätt

$$\partial e_2 = e_2(1, u_2) - e_2(0, u_2) - e_2(u_1, 1) + e_2(u_1, 0) =$$

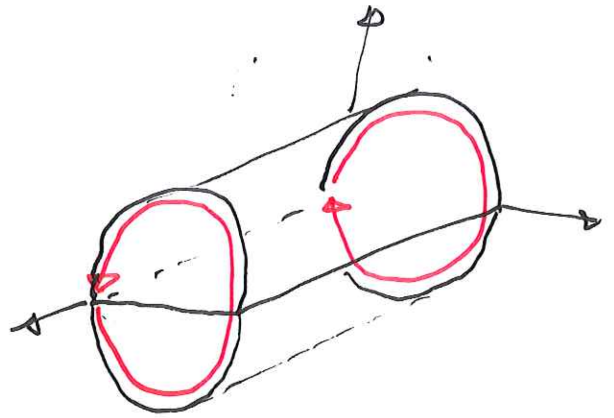
$$= (\underset{5}{0, u_2}, -\underset{0}{\cancel{\sqrt{\tfrac{1}{4} - (u_2 - \tfrac{1}{2})^2}}}) - (\underset{6}{1, u_2, -0}) - (\underset{7}{1 - u_1, 1}, -\sqrt{\tfrac{1}{4} - (\ )^2}) + (\underset{8}{1 - u_1, 1}, -\sqrt{\tfrac{1}{4} - (\ )^2})$$

Vi får alltså

$$\partial e = \cancel{(1,u_2,0)} - \cancel{(0,u_2,0)} - \left(u_1, 1, \sqrt{\tfrac{1}{4}-(\ )^2}\right) + \left(u_1, 0, \sqrt{\tfrac{1}{4}-(\ )^2}\right)$$

$$+ \cancel{(0,u_2,0)} - \cancel{(1,u_2,0)} - \left(1-u_1, 1, -\sqrt{\tfrac{1}{4}-(\ )^2}\right) + \left(1-u_1, 1, -\sqrt{\tfrac{1}{4}-(\ )^2}\right)$$

Kvar blir det vi intuitivt associerar med randen.



Sats [Stokes sats]. Antag att $k+1=n$ och att $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$ och $e: I^n \to \mathbb{R}^n$ är identitetsavbildn. (dvs $e(u_1,\dots,u_n) = (u_1,\dots,u_n)$) då kommer

$$\int_e d\omega = \int_{\partial e} \omega \qquad (1)$$

Kommentar: e är en n-cell och $d\omega \in C^n(\mathbb{R})$ så VL i (1) är per def. $d\omega(e)$.
På samma sätt så är ∂e en k-kedja så HL är per def. $\omega(\partial e)$. Stokes sats säger, kort uttryckt,

$$d\omega(e) = \omega(\partial e)$$

Extremt kompakt notation!

Bevis: Eftersom $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$ så kan vi skriva

$$\omega = \sum_I f_I \, dx_I \quad \text{där} \quad I = \{i_1 < i_2 \ldots < i_k\} \quad \text{men}$$

eftersom $k+1 = n$ så kommer varje I i vår summa att innehålla alla index utom 1, säg $I_j = dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_j} \wedge \ldots dx_n$

Vi kan därför skriva

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge \underbrace{\widehat{dx_j}}_{\text{inte med i summan}} \wedge \ldots dx_n$$

Vi får då att

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_j \wedge \ldots dx_n$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Vi får därför

$$d\omega(e) = \int_{I^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial e}{\partial u}}_{e = Id \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial u} = \det I = 1} du = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \int_{I^n} \frac{\partial f_j(u)}{\partial x_j} du =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Fubini's} \\ \text{Thm} \end{matrix} \right\} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left[\int_I \int_I \int_I \left[\int_0^1 \frac{\partial f_j(u)}{\partial u_j} du_j \right] du_1 \, du_2 \ldots du_{j-1} \, du_{j+1} \ldots du_n \right.$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Part} \\ \text{int } i \\ \text{1D} \end{matrix} \right\} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \int_{I^{n-1}} \left[f_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, 1, u_{j+1} \ldots) - f_j(u_1, \ldots, u_{j-1}, 0, u_{j+1} \ldots) \right] du_1 \ldots \hat{du_j} \ldots du_n$$

Men

$$\omega(\partial e) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left(\omega(e \circ \iota^{j,1}) - \omega(e \circ \iota^{j,0}) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left[\int_{I^k} \sum_{l=1}^{n} f_l(e \circ \iota^{j,1}) \underbrace{\frac{\partial (e \circ \iota^{j,1})_{I_l}}{\partial u}}_{=0} du \right.$$

om inte $j = l$, då $= 1$

$$\left. - \int_{I^k} \sum_{l=1}^{n} f_l(e \circ \iota^{j,0}) \underbrace{\frac{\partial (e \circ \iota^{j,0})_{I_l}}{\partial u}}_{= 0 \text{ or } 1} du \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{bara relevant} \\ \text{då } l = j \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left[\int_{I^{n-1}} \left[f_j(u_1, \ldots, 1, u_{j+1} \ldots u_n) - f_j(u_1, \ldots u_{j-1}, 0, \ldots u_n) \right] du_1 \ldots \hat{du_j} \ldots du_n \right.$$

$k = n-1$

Så likhet gäller.

Stoke's Sats: Antag att $k+l=n$, att $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$

och $e \in C_{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Då kommer

$$\left(d\omega(e)\right) = \int_e d\omega = \int_{\partial e} \omega \; \left(= \omega(\partial e)\right).$$

Bevis: Beviset är en formelexercis. Om vi låter ~~$\iota \in C_n(\mathbb{R}^n)$~~ $\iota : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara identitetsavbildningen

då kommer $e = e \circ \iota$ och $\overbrace{T^* d\omega = d(T^*\omega)}$

$$\int_e d\omega = \int_{e\circ\iota} d\omega \overset{\text{def}}{=} d\omega(e\circ\iota) = e^* d\omega(\iota) = d\left(e^*\omega(\iota)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix}\text{Föregående} \\ \text{sats}\end{matrix} \right\} = e^*\omega(\partial\iota) = e^* \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\left(\omega(\iota^{j,1}) - \omega(\iota^{j,0})\right)$$

$$\partial e = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\left(e\circ\iota^{j,1} - e\circ\iota^{j,0}\right) =$$

med $e = \mathrm{Id}$

med $e = e$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\left(\omega(e\circ\iota^{j,1} - e\circ\iota^{j,0}\right) = \omega(\partial e) =$$

$$= \int_{\partial e} \omega.$$

$\square$

Följdsats [Green's sats]: Om $\varphi(I^2) = D$ och $\partial\varphi = C$

då kommer

$$\iint_D (g_x - f_y)\, dx\, dy = \int_C f\, dx + g\, dy$$

Bevis: Om $\omega \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ~~och så~~ och $\omega = f\,dx + g\,dy$

då kommer

$$\int_C f\,dx + g\,dy = \omega(\partial\varphi) = \int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega = \int d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx}_{= -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy} + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \underbrace{\cancel{\frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy}}_{=0}$$

$$= \int_\varphi (g_x - f_y)\, dx\, dy.$$

$\blacksquare$

Följdsats [Divergenssatsen] $\iiint_D \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial D} F \cdot \underset{\text{normal}}{\vec{v}}$

normal $= (dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy)$

Bevis: sätt

$$\omega = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy \quad \text{då}$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz.$$

Applicera Stokes med $\varphi(I^3) = D$.