$$\frac{\partial T}{\partial u} = \operatorname{sgn}(DT)\,|\mathrm{Jac}_u T| \quad \text{så vi kan fortsätta } ②$$

$$② = \operatorname{sgn}(DT)\int_{I^k} f(e\circ T(u))\,\frac{\partial e}{\partial u}\Big|_{T(u)} |\mathrm{Jac}_u T|\,du = \left\{\begin{matrix}\text{change} \\ \text{of var} \\ u \to T(u)=v\end{matrix}\right\} =$$

$$= \operatorname{sgn}(DT)\int_{T(I^k)} f(e(v))\,\frac{\partial e}{\partial v}\,dv = \int_{I^k} f(e(v))\,\frac{\partial e}{\partial v}\,dv = \omega(e).$$

$= I^k$ då T är diffeomorfi.

$\boxed{}$

Eftersom varje ~~fo~~ form $\omega = \sum f_I\,dx_I$ kan skrivas som en summa, men summan är inte alls unik då

$$\omega = \sum_I f_I\,dx_I = \operatorname{sgn}(\pi)\sum_I f_I\,dx_{\pi(I)}$$

för varje permutation. För att slippa ha flera olika beteckningar på samma form så kommer vi ~~oftast att~~ ofta att använda en växande ~~ökande~~ presentation. Dvs. vi skriver varje x_I i summan som $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \ldots x_{i_k})$ där $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Detta ger en unik presentation (Sats)

En intressant sak med differentialformer är att de bildar vad som kallas en alternerande graderad algebra. Vi kan definiera en "wedge" produkt på differentialformer enligt.

$$\alpha = \sum_I f_I \, dx_I \quad \text{och} \quad \beta = \sum_J g_J \, dx_J \quad \text{då kan}$$

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} f_I g_J \, dx_I \, dx_J . \qquad \alpha + \beta = \sum_I (f_I + g_I) \, dx_I$$

För att vara säkra på att den "multiplikationen" är väldefinierad så definierar vi först produkten då α och β är på växande form.

Men det är inte viktigt nödvändigt

<u>Sats</u>: $\wedge$ är en avbildning från par av formen

$$\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \mapsto \Omega^{k+l} \qquad (\Omega^k = \{\text{alla } k \text{ former}\})$$

~~så att~~ och

a) $(\alpha+\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge\gamma + \beta\wedge\gamma$ och

$\gamma\wedge(\alpha+\beta) = \gamma\wedge\alpha + \gamma\wedge\beta$.

b) $\wedge$ är väldefinierad (oberoende av vilken representant för α & β vi väljer)

c) $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$

d) $\beta\wedge\alpha = (-1)^{kl}\,\alpha\wedge\beta$ om α = k-form
β = l-form.

En av de saker som gör differentialformer så användbara är att notationen ~~[illegible]~~ ger ett ~~ett~~ kompakt sätt att skriva ner massa satser på ett enkelt sätt. Vi behöver dock först kunna derivera differentialformer.

Det extremt kraftfulla med differentialformer är hur kompakt notationen blir.

Exempel: Låt e vara en 1-cell $e(s) = (e_1(s), 0)$

och $\omega = f(x,y)\,dx$ då är

$$\omega(e) = \int_0^1 f(e_1(s), 0)\frac{\partial e_1(s)}{\partial s}\,ds \qquad \cancel{= \int_0^1 f(s,0)\,ds.}$$

Om vi vill derivera $\omega(e)$ med avseende på e så låter vi $e_t(s) = (s, t e_2(s))$ och tittar på

$$\frac{\omega(e_t(s)) - \omega(e(s))}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_0^1 f(e_1, t e_2(s))\frac{\partial e_1}{\partial s}\,ds - \int_0^1 f(e_1, 0)\frac{\partial e_1}{\partial s}\,ds\right) \approx$$

$$\approx \int_0^1 e_2(s)\frac{\partial f(s,0)}{\partial y}\frac{\partial e_1}{\partial s}\,ds = \int_0^1\int_0^1 -\frac{\partial f(s,0)}{\partial y}\,\frac{\partial(e_1(s), t e_2(s))}{\partial(t,s)}\,dt\,ds$$

Så derivatan av en 1-form tycks bli något som ser ut som en 2-form.

Jag säger inte att det ovanstående är jätte tydligt. Men jag hävdar att följande definition är naturlig.

Definition: Låt $\omega = \sum_I f_I \, dx_I$ vara en k form

då definierar vi ~~de~~ "exterior derivative" av ω
"Yttre derivatan"

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I$$

där
$$df_I = \frac{\partial f_I}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_I}{\partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial f_I}{\partial x_n} dx_n .$$

Exempel (forts.) om $\omega = f(x,y)\,dx$ så

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx$$

Men $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$ så $dx \wedge dx = 0$

så $d\omega = -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy .$

Sats: Den yttre derivatan är en avbildning $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ som uppfyller

a) linjäritet $d(a\alpha + b\beta) = a\,d\alpha + b\,d\beta$ för $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \Omega^k$.

b) Oberoende av representanten för $\omega \in \Omega^k$.

c) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ om α är en k-form.

d) $d^2\omega = 0$ för alla $\omega \in \Omega^k$.

Bevis (d): Om $\omega = f\, dx_I$ då

$$d(d\omega) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I\right)$$

Eftersom $\wedge$ är antikommutativ så försvinner alla termer där $i=j$. Vidare så kommer termerna

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = 0 .$$

$\blacksquare$

Push forward and pullback!

Om $T: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ och $\varphi \in C_k(\mathbb{R}^n)$

då kommer vi att kunna definiera en push forward

$T_* \varphi = T \circ \varphi$ som avbilden $T: C_k(\mathbb{R}^n) \longmapsto C_k(\mathbb{R}^m)$.

Vi kan, för varje ~~k~~-form $\omega \in C^k(\mathbb{R}^m) = \{$ k-former på $\mathbb{R}^m \}$

en k-form på $\mathbb{R}^n$.

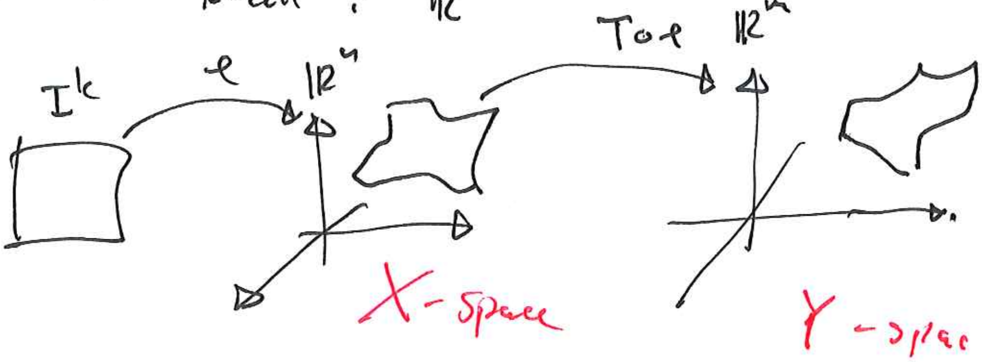
$$T^*: C^k(\mathbb{R}^m) \longmapsto C^k(\mathbb{R}^n)$$

så att, för $\varphi \in C_k(\mathbb{R}^m)$,

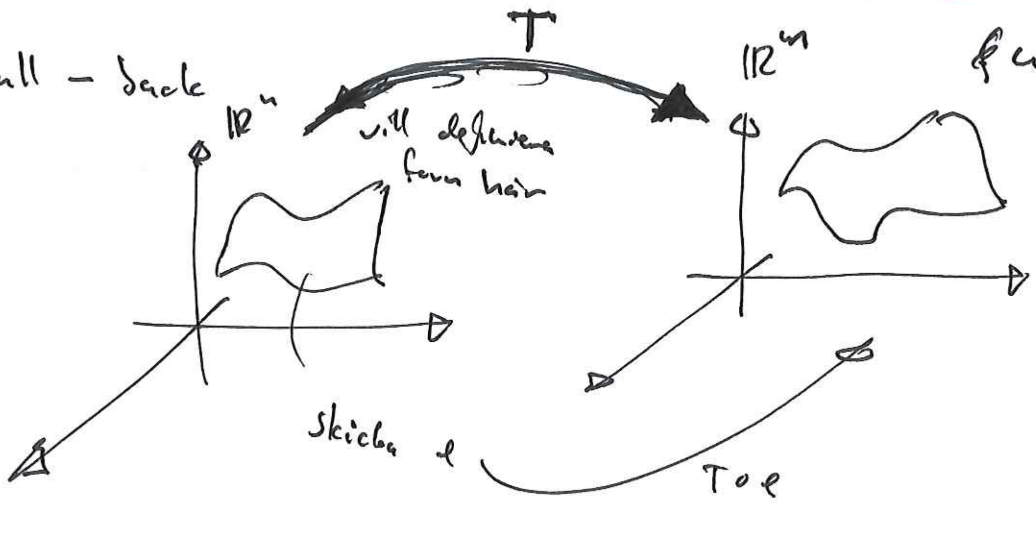
$T^*\omega(\varphi) = \omega(T \circ \varphi)$ (Pull back)

Push forward tar en ~~yta~~ k-cell ("ytan") i $\mathbb{R}^n$

till en k-cell i $\mathbb{R}^m$



Pull-back



ω form i $\mathbb{R}^m$

Sats: Pullbacks uppfyller följande:

a) $T^*(dy_I) = dT_{i_1} \wedge dT_{i_2} \wedge \dots \wedge dT_{i_k}$

b) $T^*(f\,dy_I) = (f \circ T)\, dT_{i_1} \wedge \dots \wedge dT_{i_k} \overset{\text{def}}{=} f \circ T\, dT_I$

c) $T^*(\alpha \wedge \beta) = (T^*\alpha) \wedge (T^*\beta)$

d) $dT^* = T^* d$

Bevis: Låt oss bevisa b) först

$$T^*(f\,dy_I)(\varphi) = (f\,dy_I)(T \circ \varphi) = \int_{I^k} f(T\circ\varphi)\, \frac{\partial (T\circ\varphi)_I}{\partial u}\, du =$$

$$= \int_{I^k} f(T\circ\varphi) \det \left(\frac{\partial T_I}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varphi(u)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) du$$

Vi vill visa att detta är lika med

$$(f\circ T)\, dT_{i_1} \wedge dT_{i_2} \wedge \dots \wedge dT_{i_k} = f\circ T \Big[\Big(\frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_2} dx_2 \dots \frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_n} dx_n \Big) \wedge$$

$$\Big(\frac{\partial T_{i_2}}{\partial x_1} dx_1 + \quad . \quad \Big) \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \Big(\frac{\partial T_{i_k}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial T_{i_k}}{\partial x_n} dx_n \Big) \Big]$$

$$\boxed{\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{k\pi(k)} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{bmatrix}}$$

$$= f\circ T \underbrace{\sum_{J}}_{\text{summa över alla } (j_1, j_2, \dots, j_k)\quad j_1 < j_2 < \dots < j_k} \frac{\partial T_I}{\partial x_J} dx_J$$

$$\left(f\circ T \sum_J \frac{\partial T_I}{\partial x_J}\, dx_J\right)(\varphi) = \int_{I_k} \sum_J \left(f\circ T(\varphi(u))\right)\left(\frac{\partial T_I}{\partial x_J}\right)\Big|_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi_J}{\partial u}\right) du$$

Så vi måste visa att

$$\sum_J \det\left(\frac{\partial T_I}{\partial x_J}\right)\Big|_{\varphi(u)} \det\left(\frac{\partial \varphi_J}{\partial u}\right) = \det\underbrace{\left(\left(\frac{\partial T_I}{\partial x}\Big|_{\varphi(u)}\right)\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right)}_{\text{detta är en matris}}$$

$\hookrightarrow j_1 < j_2 < \dots j_k$

$A \cdot B$

$\det \frac{\partial T_I}{\partial x_J} = \det A_I^J$

$\det \frac{\partial \varphi_J}{\partial u} = \det B_J^{J}$

där A_I^J är $k\times k$ matrisen som består av kolumnerna $j_1, j_2 \dots j_k$ av A

och $B_J^{J} =$ $k\times k$ matrisen som består av raderna $j_1 \cdot j_2 \dots j_k$ i B.

där

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_2} & & \frac{\partial T_{i_1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial T_{i_2}}{\partial x_1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial T_{i_k}}{\partial x_1} & & & \frac{\partial T_{i_k}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = (k\times n)\text{-matr}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_k} \end{bmatrix} = (n\times k)\text{-matris}$$

Så $A \times B =$ $k\times k$ matris

Vi ~~[illegible]~~ kan därför skriva att vi vill visa att

$$\underbrace{\sum_J \det A^J \det B_J}\ = \det(A\cdot B) = \det(A\cdot \underbrace{E}\cdot E^{-1}B)$$

för varje inverterbar $n\times n$ matris E.

Måste ordentligt visa att detta

är samma som $\sum_J \det(A\cdot E)^J \cdot \det(E^{-1}B)_J$.

Det är allt för meckigt att göra detta så

vi kommer inte.

c) Låt $\alpha = f\,dy_I$ $\beta = g\,dy_J$ Då

$$T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*(fg\,dy_I \wedge dy_J) = T^*(fg\,dy_{IJ}) =$$

$$(f\circ T)(g\circ T)\,dT_{IJ} = (f\circ T)(g\circ T)\,dT_I \wedge dT_J =$$

$$= (f\circ T)dT_I \wedge (g\circ T)dT_J = (T^*\alpha)\wedge(T^*\beta).$$

d) Vi börjar med att se vad T^* gör med en 1-form df, där $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^m)$

$$T^*(df) = T^*\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i\right) = \{b\} = \sum_{i=1}^m T^*\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \underbrace{T^*(dy_i)}_{=dT_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}\right)_{y=T(x)} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}\right)_{y=T(x)} \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) dx_j$$

Vi vill visa att detta är lika med $\Updownarrow =$

$$d(T^*f) = d(f\circ T) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(T(x))}{\partial x_j} dx_j \underset{\phi}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_{T(x)} \frac{\partial T_i}{\partial x_j} dx_j$$

kedjeregeln.

Om $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ så kommer, säg $\omega = f\,dy_I$

$$d(T^*\omega) = \cancel{d(f\circ T)} = \{b\} = d(T^*f\,dT_I) = \left\{\begin{array}{l} d(\alpha\wedge\beta) = \\ d\alpha\wedge\beta + (-1)^k \alpha\wedge d\beta \end{array}\right\}$$

$$= \underbrace{d(T^*f)}_{f \in \Omega^0 \text{ så enl. tidigare}} \wedge dT_I + T^*f \wedge \underbrace{d(dT_I)}_{=0} = T^*df \wedge dT_I = T^*(d\omega).$$