<u>Sats</u> [Variabelbytesformel] Antag att $R \subset \mathbb{R}^2$ är en rektangel, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$, U öppen $\bar{R} \subset U$, är en diffeomorfi.

Antag att f är Riemann integrerbar på $\varphi(R)$

Det kommer

$$\int_R f \circ \varphi(x)\, |\mathrm{Jac}_x(\varphi)|\, dx = \int_{\varphi(R)} f(x)\, dx$$

<u>Bevis:</u> Förra föreläsningen

<u>Steg 1:</u> $f \circ \varphi(x)\, |\mathrm{Jac}_x(\varphi)|$ är integrerbar på R.

<u>Steg 2:</u> Det finns en indelning R_{ij} av R så att $\operatorname{diam}(R_{ij}) < r$, för ett "litet" $r > 0$,

Så att om

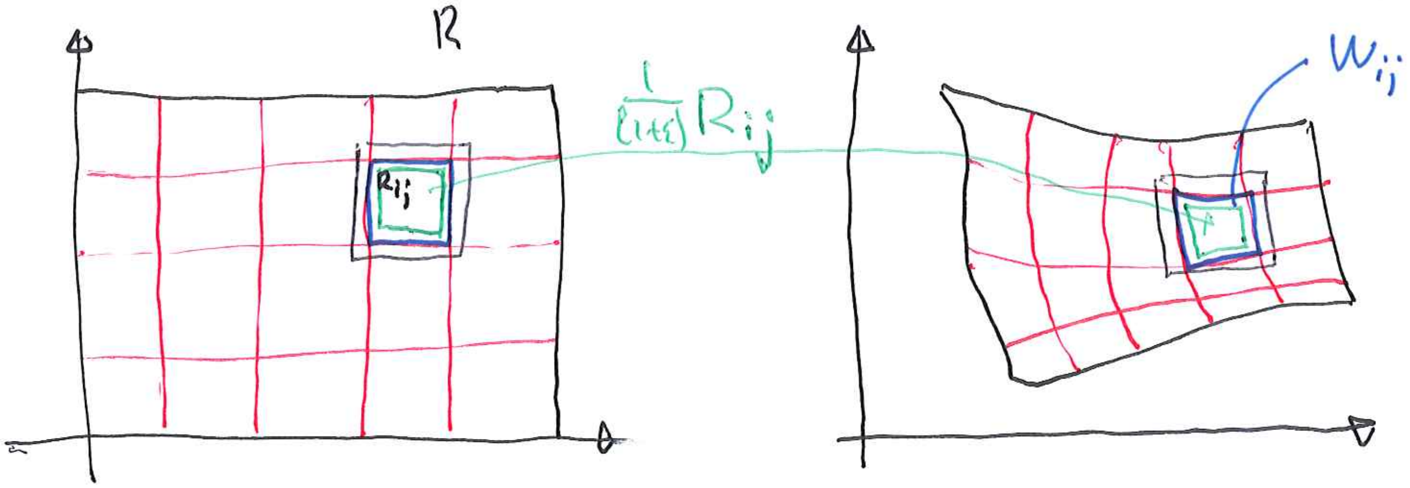
$$\varphi_{ij}(z) = \underbrace{\varphi(z_{ij})}_{w_{ij}} + \underbrace{(D\varphi)_{z_{ij}}}_{A_{ij}}(z - z_{ij})$$

är en linjär approx av φ i R_{ij}.

Då kommer, för $\varepsilon > 0$ godtyckligt (där väljer vi $r > 0$),

$$\varphi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)} R_{ij}\right) \subset \varphi(R_{ij}) = W_{ij} \subset \varphi_{ij}\left((1+\varepsilon) R_{ij}\right)$$

Vi har mer eller mindre hit förra föreläsningen!



Eftersom ℓ_{ij} är affin så kommer

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}|J_{ij}|\,|R_{ij}| \le |W_{ij}| \le (1+\varepsilon)^2 |J_{ij}|\,|R_{ij}| \qquad (1)$$

$|A|$ = "Ytan av A" och $J_{ij} = \det(A_{ij})$

Subtrahera $|J_{ij}|\,|R_{ij}|$ från alla led i (1)

$$\underbrace{-\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}|J_{ij}|\,|R_{ij}|}_{\ge -3\varepsilon |J_{ij}|\,|R_{ij}|} \le |W_{ij}| - |J_{ij}|\,|R_{ij}| \le \underbrace{(2\varepsilon+\varepsilon^2)}_{<3\varepsilon \text{ om } \varepsilon<1} |J_{ij}|\,|R_{ij}|$$

Om vi nu låter $m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f\circ\ell = \inf_{W_{ij}} f$

och $M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f\circ\ell = \sup_{W_{ij}} f$

Då får vi

$$\sum_{ij} m_{ij}\,\chi_{W_{ij}^{\circ}}(w) \le f(w) \le \sum_{ij} M_{ij}\,\chi_{\overline{W_{ij}}}$$

och om vi integrerar detta så får vi

$$\sum_{ij} m_{ij}\,|W_{ij}| \le \int_{e(R)} f(w)\,dw \le \sum_{ij} M_{ij}\,|W_{ij}| \qquad (2)$$

Men $|W_{ij}| \ge |J_{ij}|\,|R_{ij}| - 3\varepsilon\,|J_{ij}|\,|R_{ij}| \ge |J_{ij}|\,|R_{ij}| - 3\varepsilon\,|J|\,|R_{ij}|$

och $|W_{ij}| \le |J_{ij}|\,|R_{ij}| + 3\varepsilon\,|J_{ij}|\,|R_{ij}|$

där $|J| = \sup_R |\det(De)_x|$ $\Longrightarrow$ $|J_{ij}| \le |J|$.

Det följer att

$$\underbrace{\sum_{ij} m_{ij}\,|J_{ij}|\,|R_{ij}|}_{\to \int_R f\circ e\,|\det De_x|\,dx} - 3\varepsilon|J||R| \le \int_{e(R)} f(w)\,dw \le \underbrace{\sum_{ij} M_{ij}\,|J_{ij}|\,|R_{ij}|}_{\to \int_R f\circ e\,|\det De_x|} + 3\varepsilon|J||R|$$

så

$$\int_R f\circ e\,|\det De_x| - 3\varepsilon|J||R| \le \int_{e(R)} f\,dx \le \int_R f\circ e\,|\det De_x| + 3\varepsilon|J||R|$$

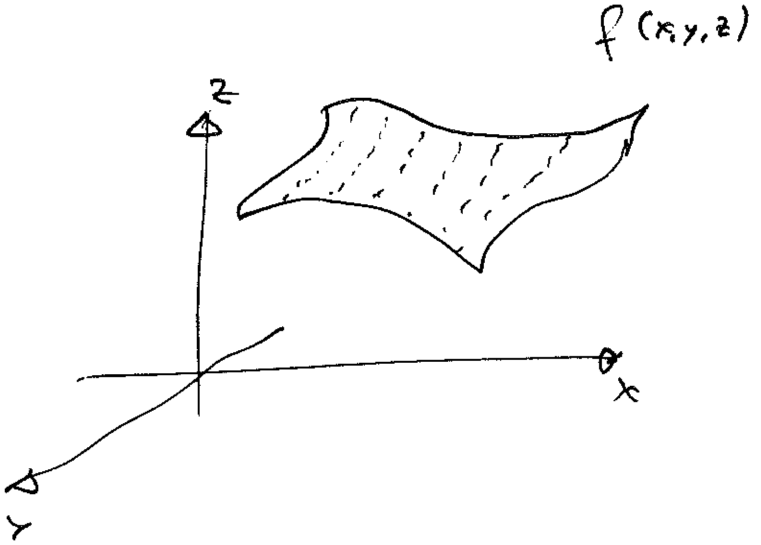
Men ε är godtycklig så likhet gäller. (3)

F23

Differentialformer.

Vi kan integrera en funktion $f(x,y)$ över $U \subset \mathbb{R}^2$.

Men ibland vill man integrera en funktion över en kurva, eller en funktion i $\mathbb{R}^n$ över en k-dimensionell yta



Formelspråket för att göra detta kallas differentialformer.

Vi skall börja med det enklaste fallet att integrera över en kurva: Vi vet från flervariabeln att

Vi kan integrera $f(x,y)$ över kurvan $C = \{(x(t), y(t)) : t \in [0,1]\}$ genom formeln

$$\int_C f(x,y)\,dx + f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left(f(x(t),y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t),y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right) dt. \quad (1)$$

Så givet en funktion f och en kurva C så kan vi få talet $\int_C f\,dx + f\,dy$.

Vi kommer att definiera differentialformen som $f\,dx + g\,dy$

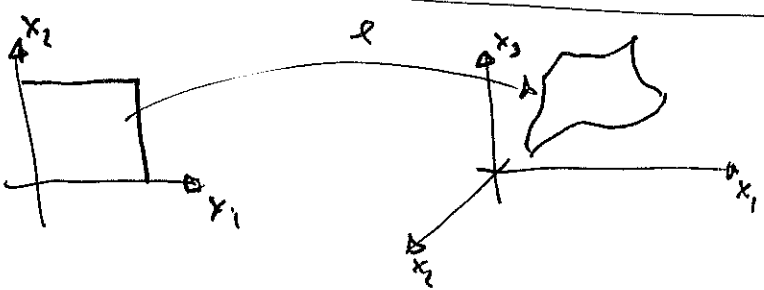
Definition: En differential 1-form är en funktion som avbildar differentierbara kurvor C på tal i $\mathbb{R}$. Enligt ekvation (1). Vi kommer att identifiera differentialformen med uttrycket $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ om avbildningen ges av

$$C \longmapsto \int_C f\,dx + g\,dy,$$

På samma sätt $f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 \dots + f_n\,dx_n$ för kurvor i $\mathbb{R}^n$.

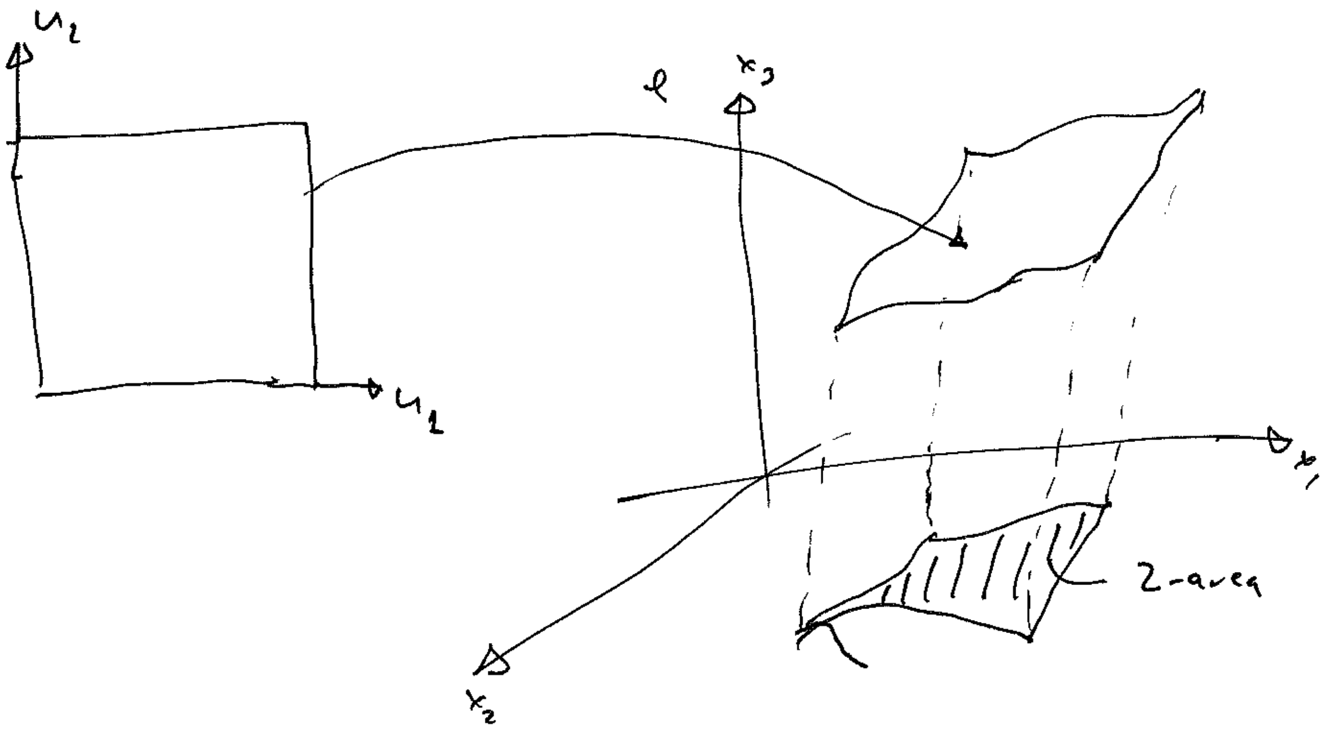
Om vi vill integrera något över en yta så behöver vi definiera motsvarigheten till ett parameterintervall $t \in [0,1]$.

Definition: En k-cell i $\mathbb{R}^n$ är en C^1 avbildning från $I^k = [0,1]^k$ in i $\mathbb{R}^n$.



En differential k-form kommer att tillskriva ett tal till varje k-cell. Vi kommer att göra det på ~~följande sätt~~ ett sätt som relaterar k-volymen av bilden $\varphi(I^k)$ till differentialformen idéen är följande

Exempel: Låt φ vara en 2-cell i $\mathbb{R}^3$



Då kommer $\varphi(u_1,u_2) = (\varphi_1(u_1,u_2), \varphi_2(u_1,u_2), \varphi_3(u_1,u_2))$ om vi tittar på projektionen av φ till x_1x_2-planet så får vi en avbildning $\hat{\varphi}: I^2 \to \mathbb{R}^2$ och ytan av projektionen (med tecken) blir

$$\int_{I^2} J_{\hat{\varphi}(u_1,u_2)} \hat{\varphi} \, du_1 du_2 = \int_{I^2} \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} du_1 du_2$$

Om vi t.ex var intresserade av ett flöde av vätskan, säg flödet i riktning e_3, genom $\varphi(I^2)$ så skulle flödet bli

$$\int_{I^2} \mathrm{Sep}(\hat{\varphi})\, du_1 du_2 .$$

Om flödet var konstant $v = (v_1, v_2, v_3)$ så skulle det totala flödet genom $\varphi(I^2)$ bli:

$$\int_{I^2} \left(v_1(x) \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_2(x) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + v_3(x) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right) du_1 du_2$$

Där $\frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial(u_1, u_2)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2} \end{bmatrix}$.

Det är därför intressant, och absolut inte onaturligt, att definiera.

<u>Definition:</u> Låt φ vara en k-cell och

$I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ $\quad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$

$J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ $\quad j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, k\}$

då definierar vi

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial u_J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_2}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial u_{j_k}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_{j_1}} & \cdots & & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial u_{j_k}} \end{bmatrix}$$

Och vi definierar x_I - arean av k-cellen φ som

$$dx_I \doteq \varphi \longmapsto \int_{I^k} \frac{\partial \varphi_I}{\partial u}\, du$$

(där ∂u står för ∂u_j med $j = (1, 2, \dots, k)$.)

Observera att x_I - arean inte är något annat än k-ytan (med tecken) av projektionen av $\varphi(I^k)$ på delrummet som ges av I koordinaterna.

<u>Definition:</u> Vi säger att $\omega \in C^k(\mathbb{R}^n)$ är en (differential) k-form om ω är en avbildning från k-celler $C_k(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^1([0,1]^k; \mathbb{R}^n)\}$ till $\mathbb{R}$ som ges av uttryckt

$$\omega = \sum_I f_I(x)\, dx_I \quad \text{så att}$$

$$\omega(\varphi) = \sum_I \int_{I^k} f_I(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_I}{\partial u}\, du.$$

Observera att alla ~~...~~ integraler vi beräknar har "tecken". Om vi ändrar ordningen på index i $I = (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)$ till $\hat{I} = (i_1, i_3, i_2, \ldots, i_k)$

då kommer

$$\frac{\partial e_I}{\partial u} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{i_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial e_{i_1}}{\partial u_2} & \cdots \\ \frac{\partial e_{i_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial e_{i_2}}{\partial u_2} & \vdots \\ \vdots & & \\ & & \frac{\partial e_{i_k}}{\partial u_k} \end{bmatrix} =$$

byt 2 och 3

$$= -\det \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{i_1}}{\partial u_1} & \cdots & \\ \frac{\partial e_{i_3}}{\partial u_1} & \frac{\partial e_{i_3}}{\partial u_2} & \\ \frac{\partial e_{i_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial e_{i_2}}{\partial u_2} & \\ \vdots & & \frac{\partial e_{i_k}}{\partial u_k} \end{bmatrix} = \frac{\partial e_{\hat{I}}}{\partial u}.$$

~~På samma sätt så kan vi definiera~~

Låt oss definiera tecknet på en permutation som $(-1)^{\text{antalet}}$ "platsbyten" som behövs för att skapa den. (upplöst.)

T.ex. om π är permutationen som tar $(1,2,3,4)$ ~~om vi skapar en permutation~~ till $I = (4,2,1,3)$ då

$$(1,2,3,4) \overset{1}{=} (1,2,4,3) \overset{2}{=} (1,4,2,3) \overset{3}{=} (4,1,2,3) \overset{4}{=} (4,2,1,3)$$

så tecknet blir $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^4 = 1$.

Det följer att om $\hat{I} = \pi(I)$ då kommer

$$\frac{\partial e_{\hat{I}}}{\partial u} = \operatorname{sgn}(\pi) \frac{\partial e_I}{\partial u}.$$

Vi definierar en k-form som en funktion på k-celler $C_k(\mathbb{R}^n)$. Men vi vill egentligen integrera över ytan $e(I^k)$. Det visar sig att "Parametriseringen" av ytan e inte är speciellt relevant för värdet $\omega(e)$.

Sats: Om $T: I^k \to I^k$ är en diffeomorfi så kommer $\det(DT)_x$ att ha samma tecken i hela I^k och

$$\omega(e \circ T) = \operatorname{sgn}(\det(DT))\,\omega(e). \qquad (1)$$

(Parametriseringen av ytan påverkar bara tecknet)

Bevis: ~~Låt~~ $\omega = \sum_I f_I\, dx_I$, det räcker att visa att (1) håller för varje term i $\sum f_I\, dx_I$.

Så vi antar att $\omega = f_I\, dx_I$.

Då gäller

$$\omega(e\circ T) = \int_{I^k} f(e\circ T(u)) \frac{\partial (e\circ T)_I}{\partial u}\, du =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kedjeregeln} \quad \cancel{\frac{\partial(e\circ T)}{\partial u}} \\ D(e\circ T) = De \cdot DT \Rightarrow \\ \det(D(e\circ T)) = \det(De)\det(DT) = \\ \frac{\partial e_I}{\partial u}\, \frac{\partial T}{\partial u} \end{array} \right\}$$

$$= \int_{I^k} f(e\circ T(u)) \left.\frac{\partial e_I}{\partial u}\right|_{T(u)} \frac{\partial T}{\partial u}\, du = (2)$$