Definition: Låt f vara en funktion definierad på $R = [a,b] \times [c,d]$. Då säger vi att f är integrerbar om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar indelningar

$$\left.\begin{array}{l} a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 \dots < y_n = d \end{array}\right\} = G$$

så att

$$U(f,G) - L(f,G) < \varepsilon.$$

Vi skriver då

$$\iint_R f \, dx dy = \sup_G L(f,G).$$

Sats: Låt f vara definierad på $R = [a,b] \times [c,d]$. Då är f Riemann integrerbar om och endast om mängden av diskontinuiteter $D = \{x ; f \text{ diskont. i } x\}$ är en nollmängd och f är begränsad.

Vi säger att D är en nollmängd om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en uppräknelig mängd rektanglar $R_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j]$ så att

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j - a_j| \, |d_j - c_j| < \varepsilon$$

Beviset är rad för rad samma som

för envariabel fallet

1) Sätt $D_k = \{ x \, ; \, \lim_{r \to 0} \operatorname{osc}_{M_r(x)} f \geq \frac{1}{k} \}$

2) D är noll om alla D_k är noll.

3) för att visa att f integrerbar så $|D_k| < \varepsilon$

använd def för integrerbarhet

$$U(f,G) - L(f,G) < \varepsilon/k$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \underbrace{\overbrace{(M_{ij} - m_{ij})}^{\geq \frac{1}{k} \text{ för rektanglar som skär } D_k} (x_{i+1} - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})}_{\leq} < \varepsilon/k$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ D_k \cap R_{ij} \neq \emptyset}} \frac{1}{k} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) < \varepsilon/\cancel{k}$$

4) D_k noll $\Rightarrow$ ~~$\varepsilon < \frac{1}{2k}$~~ Täck D_k med

Rektanglar R_{ij} så $\sum |R_j| \sup(f) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, ~~$\frac{1}{2k}$~~

kompakt ~~oändligt~~ ändlig delövertäckning ~~mängan~~ —

e.t.c.

U integrera $f\chi_U$ över $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ ger diskont på ∂U $\Rightarrow$ ∂U nollmängd...

Det är inte helt uppenbart hur man kan integrera $f(x,y)$ ens om vi har ett explizit uttryck för f.
Vi behöver en analysens huvudsats variant ~~av~~ för multipel integraler, eller snarare ett sätt att ~~För att~~ reducera multipel integralen till en serie av envariabelintegraler

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{inte nödvändigtvis definierad för alla } y\,!}\Big]\,dy$$

Exempel: Låt $R = [-1,2] \times [-1,1]$ och ~~$f(x,y)$~~

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ \text{inte integrerbar funktion i } x \text{ (men begränsad)} & \text{om } y = 0 \end{cases}$$

Då kommer $D(f)$ att vara en nollmängd i $\mathbb{R}^2$

men $\int_{-1}^{1} f(x,0)\,dx$ = inte definierad

Fast

$$\int_{[-1,2]\times[-1,1]} f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Definition: Låt f vara en begränsad funktion på $[a,b]$. Då definieran vi

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P U(f,P) \,, \quad P \text{ indelning av } [a,b].$$

och
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P L(f,P).$$

Sats [Fubini]: Om $f(x,y)$ är integrerbar på $R = [a,b] \times [c,d]$ och

$$\overline{F}(y) = \overline{\int_a^b} f(x,y)\,dx$$

$$\underline{F}(y) = \underline{\int_a^b} f(x,y)\,dx$$

Då är $\overline{F}(y)$ och $\underline{F}(y)$ integrerbar på $[c,d]$ och

$$\int_R f = \int_c^d \underline{F}\,dy = \int_c^d \overline{F}\,dy.$$

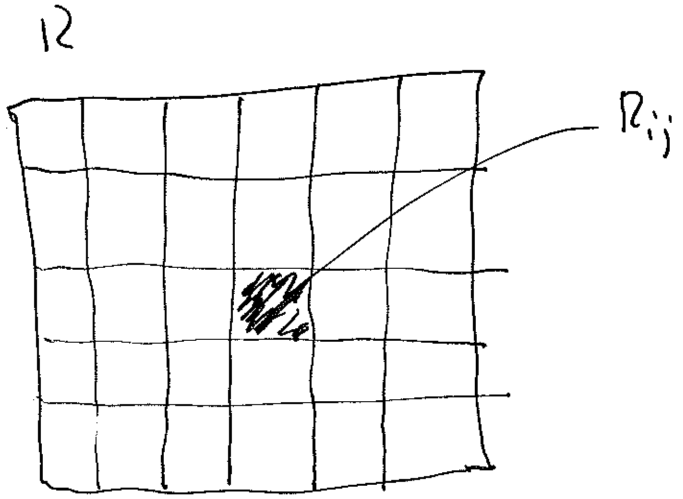
Något djup! Detta säger att

$\overline{F}(y) = \underline{F}(y)$ nästan överallt och därför att $f(x,y)$ är integrerbar i x för nästan alla y.

Bevis: Låt $\left.\begin{array}{l} P: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \\ Q: \ c = y_0 < \ldots < y_m = d \end{array}\right\} = G$

Då kommer $L(f, G) \leq L(\underline{F}, Q)$, $(*)$

För att se detta så tittar vi på en kub $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$



Kuben R_{ij}'s bidrag till $L(f, G)$ är

$$\underbrace{\left(\sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)\right)}_{m_{ij}} \times (x_i - x_{i-1}) \times (y_j - y_{j-1}) \quad \text{till} \quad L(f, G)$$

Och till $L(\underline{F}, Q)$

$$\sup_{y \in (y_j, y_{j-1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx \cdot (y_j - y_{j-1}) \geq \sup_{y \in (y_j, y_{j-1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_{ij}\,dx \cdot (y_j - y_{j-1}) = m_{ij}\,(x_i - x_{i-1}) \times (\ldots)$$

Så varje kub R_{ij} ger större bidrag till $L(\underline{F}, Q)$ än till $L(f, G)$ vilket ger att summan blir större. $(*)$ följer.

Men på samma sätt $\quad U(\bar{F}, Q) \leq U(f, G)$

Därför:

(1)

$$L(f, G) \leq L(\underline{F}, Q) \leq \cancel{U(\underline{F}, Q)}\ L(\bar{F}, Q) \leq U(\underline{F}, Q) \leq U(\bar{F}, Q) \leq L(f, G)$$

Men om vi väljer G så att

$$U(f, G) - L(f, G) < \varepsilon \qquad \text{så}$$

följer det att

$$\left.\begin{array}{l} U(\underline{F}, Q) - L(\underline{F}, Q) < \varepsilon \\ U(\bar{F}, Q) - L(\bar{F}, Q) < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{F} \text{ och } \bar{F} \text{ integrerbara.}$$

Men från (1) så får vi att

$$\sup_G L(f, G) = \int_R f\,dx\,dy \leq \sup_Q L(\underline{F}, Q) \overset{\text{integrerbar}}{=} \inf_Q U(\underline{F}, Q) \leq \inf_G U(f, G) = \int_R f\,dx\,dy$$

så $\displaystyle\int_R f\,dx\,dy = \int_c^d \underline{F}(y)\,dy$

och på samma sätt $\displaystyle\int_R f\,dx\,dy = \int_c^d \bar{F}\,dy.$

$\boxed{\Sigma}$

Sats [Variabelbytesformel] Antag att $R \subset \mathbb{R}^2$ är en rektangel och att f är Riemannintegrerbar på $\varphi(R)$ där $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ är en diffeomorfi (dvs $\varphi \in C^1(R)$ och $(D\varphi)_x$ är inverterbar för alla $x \in R$), & $\overline{R} \subset U$.

Då kommer

$$\int_R f \circ \varphi(x)\, |\mathrm{Jac}_x \varphi|\, dx = \int_{\varphi(R)} f(x)\, dx$$

där Jacobianen $\mathrm{Jac}_x(\varphi) = \det((D\varphi)_x)$.

Som alltid i analysen så angriper vi det svåra problemet genom att approximera med konstanter, linjära funktioner etc. Och sen går vi i gränsen.

En taylor approximation ger

$$f(x) = f(w) + (Df)_w(x-w) + R(x-w)$$

Vi måste förstå vad den linjära avbildningen $(Df)_w$ gör med integraler.

Hjälpsats: Om χ_S är integrerbar och $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär. Då kommer

$$\int \chi_{TS}(x)\,dx = |\det T| \int \chi_S(x)\,dx.$$

Bevis: Om χ_S är integrerbar så finns det en indelning $G = \begin{cases} a = x_0 < x_1 \dots < b \\ c = y_0 < y_1 < \dots y_m = d \end{cases}$

så att

$$U(\chi_S, G) - L(\chi_S, G) < \varepsilon$$

Men $U(\chi_S, G) = \sum_{R_{ij} \cap S \neq \emptyset} |R_{ij}|$, $L(\chi_S, G) = \sum_{R_{ij} \subset S} |R_{ij}|$

~~Sedan~~ eftersom $\sup_{R_{ij}} \chi_S = \begin{cases} 1 & R_{ij} \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ $\inf_{R_{ij}} \chi_S = \begin{cases} 1 & R_{ij} \subset S \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Men vi kan skriva

$$\sum_{R_{ij} \subset S} \chi_{R_{ij}} \leq \chi_S \leq \sum_{R_{ij} \cap S \neq \emptyset} \chi_{R_{ij}}.$$

Så
$$\sum_{R_{ij} \subset S} \chi_{T R_{ij}} \leq \chi_{TS} \leq \sum_{R_{ij} \cap S \neq \emptyset} \chi_{T (R_{ij})}$$

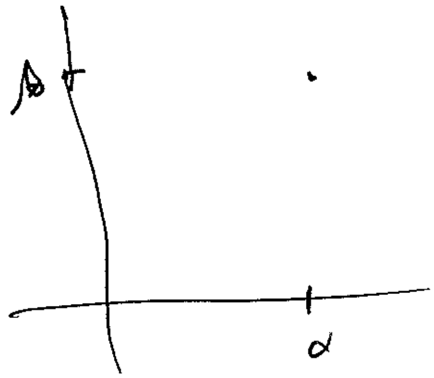
Det räcker därför att visa att

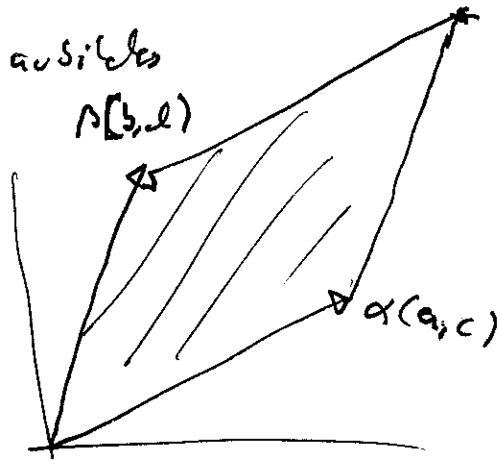
$$\int \chi_{T R_{ij}} = |\det(T)| \int \chi_{R_{ij}}.$$

Men om $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så kommer

Rektangeln $[0, \alpha] \times [0, \beta]$ att avbildas

på





Att räkna ytan av den parallellogrammen är elementärt, men jobbigt, och ger $|T R_{ij}| = |\det T|\,|R_{ij}|$.

Nästa steg är att skatta inflytandet av resttermen på approximationen

Hjälpsats. Låt $R_r(x_0)$ vara rektangeln med sidlängd r och centrum i x_0. Vidare antag att

$\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ så att $\varphi \in C^1$ och

$$\|(D\varphi)_x - \mathrm{Id}\| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \in R_r(x_0)$$

Då kommer

$$\varphi(R_r(x_0)) \subset R_{(1+\varepsilon)r}(\varphi(x_0))$$

__Bevis:__ Enl. medelvärdessatsen så

$$\varphi(x_0+u) - \varphi(x_0) = \int_0^1 (D\varphi)_{x_0+tu}(u)\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left((D\varphi)_{x_0+tu} - \mathrm{Id}\right)(u)\, dt}_{<\varepsilon |u|} + u$$

så om $u \in R_r(x_0)$ så ligger $\varphi(u) \in R_{(1+\varepsilon)r}(\varphi(x_0))$.

Hjälpsats: Om S är en nollmängd och $e: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lipschitz. Då är $e(S)$ en nollmängd.

Bevis: Täck S med rektangler R_j så att $\sum |R_j| < \varepsilon$. Då kommer $e(S)$ att täckas av $\bigcup e(R_j)$ men varje $e(R_j)$ täcks av en rektangel $\hat{R}_j$ med sidlängd $C \cdot R_j$ så

$$\sum_j |\hat{R}_j| \leq C^2 \varepsilon.$$

~~Sats~~ Bevis: Vi vill visa att

$$\int_R f \circ e \cdot |\operatorname{Jac} e| = \int_{e(R)} f .$$

Eftersom f är integrerbar så är mängden diskontinuiteter $D(f)$ en nollmängd. Och diskontinuitetsmängden för $f \circ e$ är $e^{-1}(D)$ vilket är en nollmängd eftersom e^{-1} är lipschitz då e^{-1} är C^1.

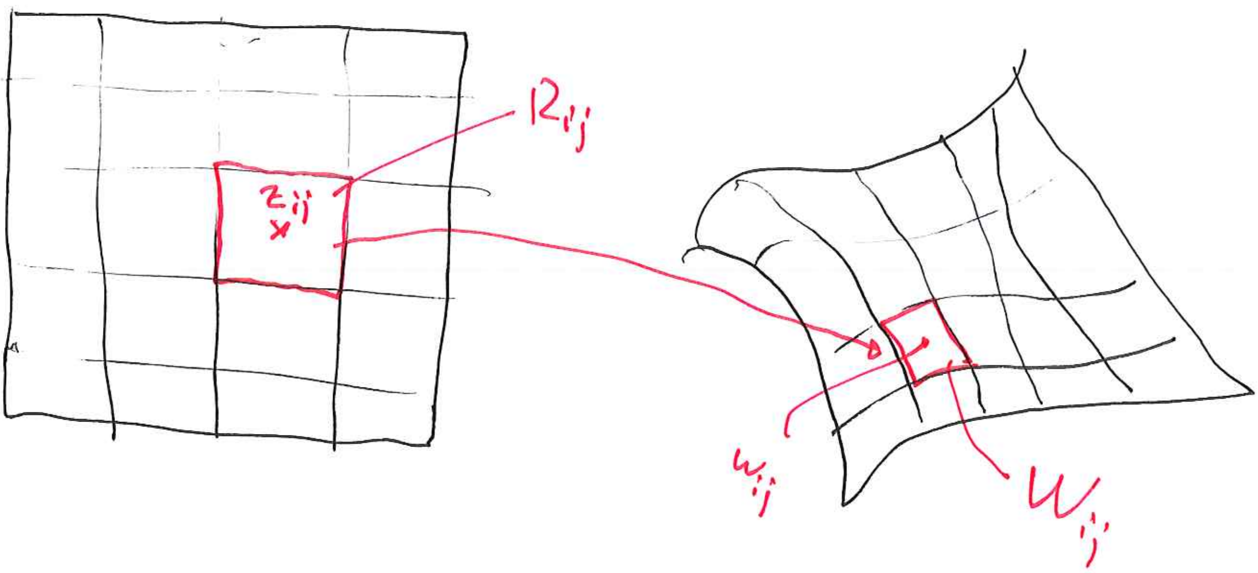
Vidare så är $(De)_x$ kontinuerlig och därför $\det((De)_x)$ kontinuerlig. Så

Diskontinuitetsmängden för $f \circ e\, |\operatorname{Jac}(e)|$ är en nollmängd. $\Rightarrow$ $f \circ e |\operatorname{Jac}(e)|$ är integrerbar.

Välj en indelning G av rektanglar R_{ij} där ~~[struck word]~~ diametern av R_{ij} är mindre än något litet r, och gör Taylor approximationen

$$e(z) = \underbrace{e(z_{ij})}_{= w_{ij}} + \underbrace{(De)_{z_{ij}}}_{A_{ij}}(z - z_{ij}) + R(z - z_{ij})$$

Och låt $W_{ij} = e(R_{ij})$

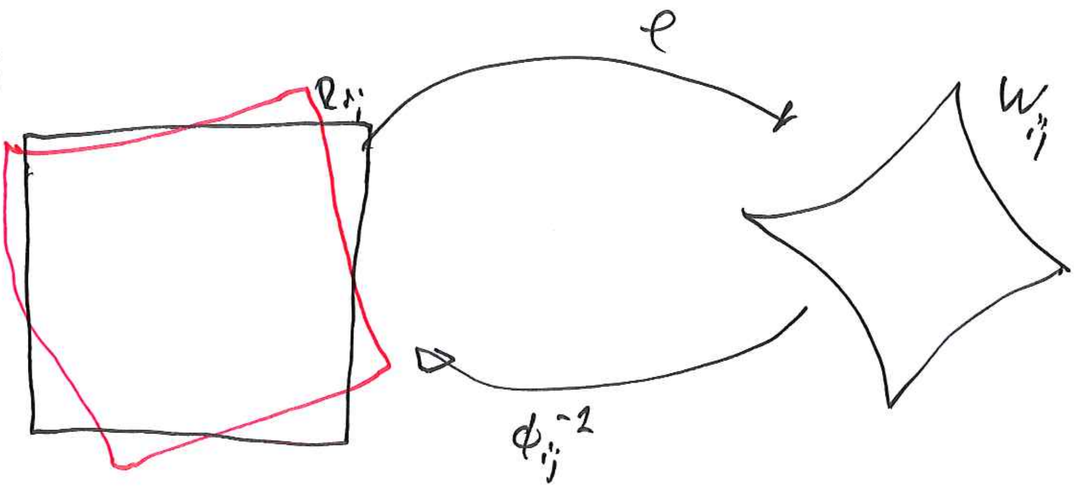


I R_{ij} så vill vi approximera e med $e_{ij}(z) = w_{ij} + A_{ij}(z - z_{ij})$

Då kommer

$$\psi = \phi_{ij}^{-1} \circ e \qquad \text{att uppfylla}$$

$\psi(z_{ij}) = z_{ij}$



~~Om~~ Eftersom De är kontinuerlig så kommer, om r är litet,

$$D\psi = \left(D(\phi_{ij}^{-1})\right)(De) = A_{ij}^{-1}\cdot\left(A_{ij} + (DR)\right)$$

$$= I + A_{ij}^{-1}(DR)$$ så om r är

litet, så $\|DR\| << 1$, så $\|D\psi - I\| < \varepsilon$.

Detta innebär att $\phi_{ij}^{-1}\circ\phi(R_{ij}) \subset (1+\varepsilon)R_{ij} \Rightarrow \phi(R_{ij}) \subset \phi_{ij}((1+\varepsilon)R_{ij})$

Och på samma sätt

$$\phi^{-1}\circ\phi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)}R_{ij}\right) \subset R_{ij} \Rightarrow \phi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)}R_{ij}\right) \subset \phi(R_{ij}) = W_{ij}$$

Så

$$\phi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)}R_{ij}\right) \subset W_{ij} \subset \phi_{ij}\left((1+\varepsilon)R_{ij}\right)$$

Linjär $= A_{ij} = \det\left((De)_{z_{ij}}\right) = J_{ij}$

$$\frac{\cancel{\det}|J_{ij}|}{(1+\varepsilon)^2}|R_{ij}| \leq |W_{ij}| \leq |J_{ij}|\,|R_{ij}|\,(1+\varepsilon)^2.$$

Ta $-|J_{ij}|\,|R_{ij}|$ och få, om $|\varepsilon| < 1$

$$-\cancel{\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}}\ |J_{ij}|\,|R_{ij}| \leq |W_{ij}| - |J_{ij}|\,|R_{ij}| \leq \cancel{\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}}\ |J_{ij}|\,|R_{ij}|$$

3ε $\qquad\qquad$ 3ε

Om ~~f~~ m_{ij} och M_{ij} är min resp max av f på R_{ij} så kommer

$$\sum m_{ij} \chi_{W_{ij}^0}(w) \le f(w) \le \sum M_{ij} \chi_{W_{ij}^0}(w)$$

så

$$\underbrace{\sum m_{ij} |W_{ij}|}_{\ge |J_{ij}| |R_{ij}| - 12\varepsilon |J_{ij}| |R_{ij}|} \le \int_{e(R)} f \le \sum M_{ij} \underbrace{|W_{ij}|}_{\le 3\varepsilon |J_{ij}| |R_{ij}| + |J_{ij}| |R_{ij}|}$$

Så om vi tar supremum över alla indelningar och sätter $M = \sup |f| \, \delta = \sup(|D e|)$ så

$$\int_R f \circ e \, |\det(e)| - 12 M \delta |R| \varepsilon \le \int_{e(R)} f \le \int_R f \circ e \, |\det e| + 3\varepsilon M \delta |R|$$

för alla $\varepsilon > 0$. Låt $\varepsilon \to 0$ ger resultatet.