Högre derivator:

Högre derivator fungerar på samma sätt som första ordningens derivator. Det låter enkelt, men "på samma sätt" är mycket mer komplicerat för högre ordningens derivator.

Om vi tittar på första derivatan av $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Då blir $(Df)_x : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \left\{ \begin{array}{c} \text{linjära avbildningar} \\ \text{från } \mathbb{R}^n \text{ till } \mathbb{R}^m \end{array} \right\}$

Men vi kan se detta som en avbildning

$$\underset{x}{(Df)} : \underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{v}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m \qquad \text{linjär i } v.$$

På samma sätt kan $(D^2 f)_x$ tolkas som

$$(D^2 f)_x : \underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{v}{\mathbb{R}^n} \times \underset{w}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m \qquad \text{linjär i } v \,\&\, w.$$

Tekniskt sett så är $D(Df)_x : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ för varje fixt x.

Så $(D^2 f)_x (v, w) \in \mathbb{R}^m$ där $(D^2 f)_x (v,w)$ är linjär i v&w.

Precis som för förstaderivatan så kan vi beräkna

$$(D^2 f)_x (e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

om funktionen är differentierbar

<u>Sats:</u> Om $(D^2 f)_p$ existerar så kommer för alla $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$(D^2 f)_p (v,w) = (D^2 f)_p (w,v).$$

Bevis: Eftersom $(D^2 f)_p$ är linjär i w och i v så räcker det att visa att

$$(D^2 f)_p (e_i, e_j) = (D^2 f)_p (e_j, e_i) \qquad \text{för } i,j = 1,\dots,n.$$

Vi kan också anta att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så kan vi titta på varje komponent för sig.)

Vi vet att ~~$(Df)_p$~~ $D\left((Df)_p(e_i)\right)(e_j) =$

$$= D\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(p + e_i h) - f(p)}{h}\right)(e_j) =$$

$$= \lim_{k \to 0}\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(p + e_i h + e_j k) - f(p + e_j k) - f(p + e_i h) + f(p)}{hk}\right) \quad \text{och}$$

$$D\left((Df)_p(e_j)\right)(e_i) = \lim_{h \to 0}\left(\lim_{k \to 0} \frac{f(p + e_i h + e_j k) - f(p + e_j k) - f(p + e_i h) + f(p)}{hk}\right)$$

Vi måste visa att vi kan byta ordning på gränsvärdena!

Det lättaste sättet att visa detta är att visa att

$$\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(p+e_ih+e_jk)-f(p+e_jk)-f(p+e_ih)+f(p)}{hk}\right)= \quad (1)$$

$$=\lim_{\hat{k}=k\to 0}\left(\frac{f(p+e_i\hat{k}+e_jk)-f(p+e_jk)-f(p+e_i\hat{k})+f(p)}{k^2}\right)=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\cancel{g(p+e_jk}\,(Df)_{p+\theta ke_i+e_jk}(e_i)-(Df)_{p+\theta ke_i}(e_i)}{k} \quad (3)$$

samma.

Ta (1) minus (3) ger

$$\lim_{k\to 0}\left(\frac{(Df)_{p+e_jk}(e_i)-(Df)_p(e_i)-(Df)_{p+e_jk+\theta ke_i}(e_i)+(Df)_{p+\theta ke_i}(e_i)}{k}\right) \quad (4)$$

För att visa att detta är noll så gör vi en Taylor approximation av $(Df)_{p+x}(e_i)$:

$$(Df)_{p+x}(e_i)=(Df)_p(e_i)+(D^2f)_p(x,e_i)+\underbrace{R(x,e_i)}_{=o(|x|)}$$ och

för att uttrycket (4) är

$$\frac{1}{k}\Big(\cancel{(Df)_p(e_i)}+(D^2f)_p(ke_j,e_i)-\cancel{(Df)_p(e_i)}-\cancel{(Df)_p(e_i)}-(D^2f)_p(e_jk+\theta ke_i,e_i)$$
$$+\cancel{(Df)_p(e_i)}+(D^2f)_p(ke_i,e_i)\Big)+o(1)=o(1)$$

Följsats: $$(D^2 f)_p(v,w) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv+tw) - f(p+tv) - f(p+tw) + f(p)}{t^2}$$

om f är differentierbar i p.

Lite funktionsklasser:

Vi har ~~sedan~~ tidigare definierat $C^0(D)$ och $C^1(D)$.

Vi kan också definiera

Def: Vi säger att $C^k(D)$ är rummet av k-gången differentierbara funktioner

$$C^k(D) = \{f;\ f \in C^0(D),\ Df \in C^0(D),\ D^2 f \in C^0(D), \ldots, D^k f \in C^0(D)\}$$

med ~~norm~~ metriken

$$d_{C^k}(f,g) = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \sup_{x \in D} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} g(x)}{\partial x^\alpha} \right| .$$

Här är α ett multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$\alpha_j \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $\qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ och

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Ekvivalent metriken

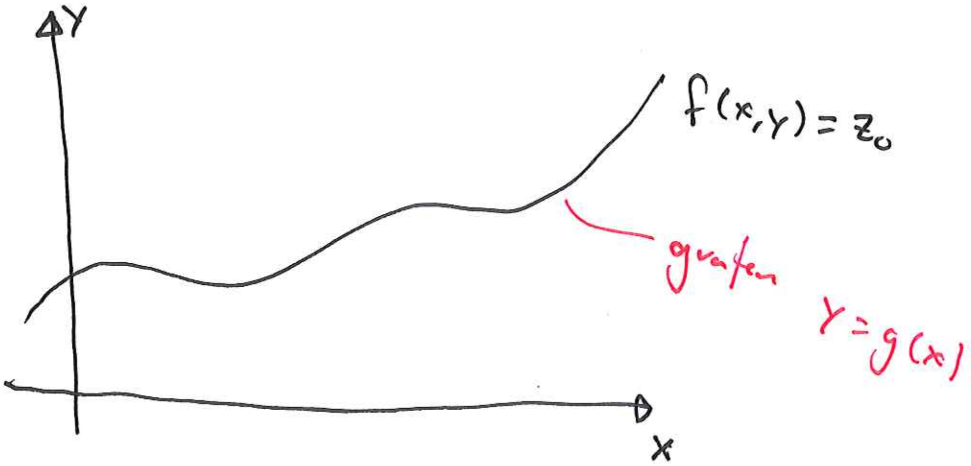
Vi skall nu hoppa till "ekvationslösning".

Låt $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, vara en funktion och $z_0 \in \mathbb{R}^m$. Vi vill hitta en lösning till

$$f(x,y) = z_0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^m$$

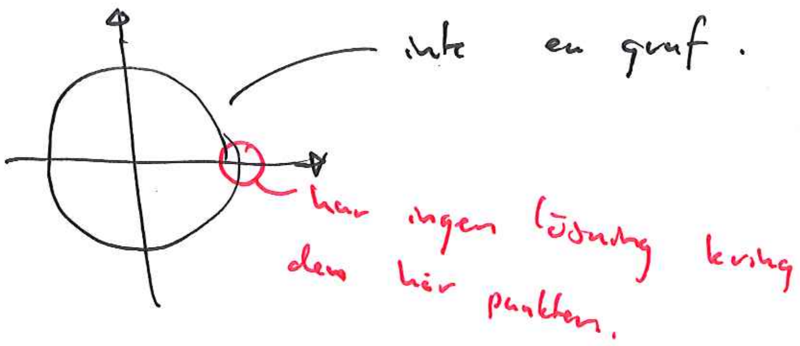
Med en "lösning" avser vi en funktion $g(x) = y$ så att $f(x, g(x)) = z_0$.

I ~~$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$~~ om $n = m = 1$ så ser situationen



En sådan lösning behöver inte existera globalt

T.ex. $f = x^2 + y^2 - 1$ och $z = 0$



För att garantera att en lösning exsisterar så antar vi att $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} > 0$ då kommer det att finnas

en omgivning kring (x,y) där f endast kan antega värdet z_0 en gång för varje x.

Observera att i fallet $m=n=0$ och $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$

så blir problemet ~~[illegible]~~. enkelt. Låt oss titta på det generella fallet

---

<u>Sats</u> [implizita funktionssatsen]: Om $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, är $C^1(U)$ och om $\overbrace{\text{matrisen}}^{m \times m}$

$$B = \left[\frac{\partial f_i(x_0,y_0)}{\partial y_j}\right]$$

är inverterbar, $f(x_0,y_0) = z_0$,

då exsisterar det ett område (öppet) kring $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ och en unik funktion $g(x)$ så att

$f(x, g(x)) = z_0$. Dessutom så är $g \in C^1$

Bevis: Vi kan anta att $(x_0, y_0) = 0$ och $z_0 = 0$.

Vi skriver $f(x,y) = Ax + By + R(x,y)$ där

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\|R(x,y)\|}{|(x,y)|} \to 0.$$

Vi vill hitta y så att

$$Ax + By + R(x,y) = 0 \iff y = B^{-1}(+Ax + R(x,y))$$

Men givet ett x detta är det samma som att hitta en fixpunkt till

$$K_x(y) = y \quad \text{där} \quad K_x(y) = -B^{-1}(Ax + R(x,y)).$$

Enl. Banach's fixpunkssats så har $K_x(y) = y$ en fixpunkt om $|K_x(y_1) - K_x(y_2)| \leq \lambda |y_1 - y_2|$, $\lambda < 1$.

Vi beräknar

$$|K_x(y_1) - K_x(y_2)| = |B^{-1}(R(x,y_1) - R(x,y_2))| \leq \|B^{-1}\| \left\|\frac{\partial K}{\partial y}\right\| |y_1 - y_2|$$

Men $\frac{\partial R(x,y)}{\partial y} = 0$ då $(x,y) = 0$ så om $|(x,y)| < \delta$

så kommer $\left\|\frac{R(x,y)}{\partial y}\right\| < \frac{1}{2\|B^{-1}\|}$ $(= \varepsilon)$

Vidare så är $K_x(0) = B^{-1}\big(Ax + R(x,0)\big)$

så om x är litet så kommer

$$|K_x(0)| < \delta/2 .$$

Detta innebär att, för $|y| < \delta$

$$|K_x(y)| \le \underbrace{|K_x(y) - K_x(0)|}_{<\delta/2} + \underbrace{|K_x(0)|}_{<\delta/2} < \delta$$

så för små x så är

$K_x = B^{-1}(Ax + R(x,0))$ en ~~kontrakt~~ sammandragning

av området $|y| < \delta$. $\Rightarrow$ K_x har en unik fixpunkt.

Vi definierar $g(x) = y$ där y är fixpunkten $y = K_x(y)$.

Vi måste visa att $g(x)$ är C^1! Vi kommer bara att visa att $g(x)$ är differentierbar i origo. Vi börjar med att visa att $g(x)$ är lipschitz i origo

$$|g(x) - g(0)| = |g(x)| =$$

$$= |K_x(g(x)) - K_x(0) + K_x(0)| \le Lip(K_x)\,|g(x) - 0| + |K_x(0)| \qquad (1)$$

Där $\mathrm{Lip}(K_x)$ är minsta konstanten så att

$$|K_x(y) - K_x(0)| \leq \mathrm{Lip}(K_x)\,|y|$$

så $\mathrm{Lip}(K_x) \leq \sup_{M_\delta(0)} |D_y K_x(y)| = \sup_{M_\delta(0)} |B^{-1} D_y R(x,y)| < \frac{1}{2}$

om δ litet eftersom R kont. och $|D_y R(x,y)| \to 0$

då $x, y \to 0$

Vidare så $$|K_x(0)| = |B^{-1}(\underbrace{Ax}_{< C|x|} + \underbrace{R(x,0)}_{\leq C|x|})| \leq C|x|.$$

Sätt in i ① ger

$$|g(x) - g(0)| \leq \frac{|g(x)|}{2} + 2C|x| \implies |g(x) - g(0)| \leq 4C|x|.$$

Så

$\cancel{|g(tv) - g(0) - t(-B^{-1}Av)| = |B^{-1} R(x, g(}$

$$g(tv) - g(0) = -B^{-1}(\cancel{t}Av + R(tv, g(tv)) -$$

$$\implies \left| \frac{g(tv) - g(0)}{t} - (-B^{-1}Av) \right| = \left| B^{-1} \frac{R(tv, g(tv))}{t} \right| \to 0$$

då $t \to 0$.

så $$(Dg)_0(v) = \lim_{t \to 0} \frac{g(tv) - g(0)}{t} = -B^{-1}Av$$

∎