Definition: Vi säger att $A \subset C^0(\mathcal{M})$ är en funktionsalgebra om

$f, g \in A \Rightarrow f+g \in A$ och $f \cdot g \in A$

samt $r \in \mathbb{R}$, $f \in A \Rightarrow rf \in A$.

Sats [Stone-Weierstrass] $\mathcal{M}$ kompakt metriskt rum

A en funktionsalgebra i $C^0(\mathcal{M})$ så att

i) $x \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists f \in A$ $f(x) \neq 0$ (algebran försvinner inte i någon punkt)

ii) $x, y \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists f \in A$ $f(x) \neq f(y)$. (separerar punkter)

Då kommer $\bar{A} = C^0(\mathcal{M})$, dvs $g \in C^0$ och $\varepsilon > 0$ $\exists f \in A$ $\|g - f\| < \varepsilon$.

Exempel: Alla trigonometriska polynom

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$ är en funktionsalgebra på i $C^0[-\pi, \pi]$

(Tänk $e^{inx} \cdot e^{imx} = e^{i(m+n)x}$, så cos ...)

i) $\cos(x) \neq 0$ då $\sin(x) = 0$

ii)

...

Så varje $f \in C^0([-\pi, \pi])$ kan approximeras godtyckligt nära med trig. poly.

Stone Weierstrass thm

~~Def... Vi säger~~

Definition: Vi säger att en mängd A funktioner är ett "lattice" om $f,g \in A \Rightarrow \sup(f,g) \in A$, $\inf(f,g) \in A$

Sats: Om $A \subset C^0(M)$ är ett lattice, M kompakt, och $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ~~given~~ och $x, y \in M$ så finns det ett $f \in A$ så $f(x) = \alpha$ & $f(y) = \beta$ då kommer $\overline{A} = C^0(M)$. 1

Bevis: ~~Steg 1~~ Givet en funktion $g \in C^0(M)$ så måste vi för alla $\varepsilon > 0$ hitta $f_\varepsilon \in A$ så $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$.

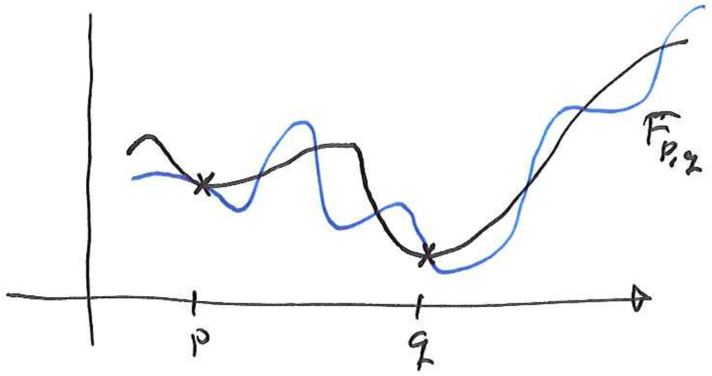
Steg 1: Det existerar $f_p \in A$ all $p \in M$ så att

$$f_p(p) = f(p) \quad \text{och} \quad f_p(x) > f(x) - \varepsilon$$

Bevis steg 1

Låt $F_{p,q}(x) \in A$ så att

$F_{p,q}(p) = f(p)$ och $F_{p,q}(q) = f(q)$ (enl. 1)



Observera att eftersom $F_{p,q}(q) = f(q)$, $F_{p,q}, f \in C^0$ så existerar

det en öppen omgivning U_q av q så att $F_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon$.

Då kommer $\bigcup_{q \in M} U_q$ att vara ett öppet övertäckning

av M så U_q har en ändlig deltäckning så

att $U_{q_1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}$

Definiera $f_p = \sup(F_{p,q_1}, F_{p,q_2}, \ldots F_{p,q_n})$

I U_{q_j} kommer $f_p \geq F_{p_j} \geq f - \varepsilon$

så $\bigcup_{j=1}^{n} U_{q_j} = M$ kommer $f_p \geq f - \varepsilon$

Steg 2 $\exists f_\varepsilon \in A$ så $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$.

På samma sätt så kommer $f_p < f+\varepsilon$ i en öppen omgivning U_p av varje $p \in M$ så $M \subset \bigcup U_p$, M kompakt $\Rightarrow$ ändlig delövertäckning $U_{p_1} \ldots U_{p_m}$. Definiera

$$f_\varepsilon = \inf(f_{p_1} \ldots f_{p_m}) < f_{p_j} < f+\varepsilon \text{ i } U_{p_j}$$

så $f_\varepsilon < f+\varepsilon$ men

$f_\varepsilon > f-\varepsilon$ eftersom varje f_{p_j} är det. ∎

Hjälpsats: Antag att A är en funktionsalgebra i $C^0(M)$ och om $f \in A$ så $|f| \in \bar{A}$ då kommer $\sup(f,g) \in \bar{A}$, $\inf(f,g) \in \bar{A}$ för alla $f,g \in \bar{A}$.

Bevis:

$$\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

Så ~~om f~~ vi måste visa att

Hjälpsats: $\mathcal{A}$ funktionsalgebra i $C^0(M) \Rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ funktionsalgebra.

Bevis: $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{\mathcal{A}}$ då $\exists f_j, g_j$ så $f_j \rightrightarrows \bar{f}$

och $g_j \rightrightarrows \bar{g}$

Men summa regeln $f_j + g_j \rightrightarrows \bar{f} + \bar{g}$.

samma med $f_j \cdot g_j$ — osv

∎

~~Om~~ Proposition: Om $\mathcal{A}$ är en funktionsalgebra i $C^0(M)$ så kommer $f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f| \in \bar{\mathcal{A}}$.

Bevis: ~~Stone~~ Gör Taylor expansionen av

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - \cdot)^n = \sqrt{\varepsilon^2 + t}$ i $t = \frac{\|f\|^2}{2}$, konvergerar för ~~$t \in (-\varepsilon^2$~~$, 1+\varepsilon^2)$

~~så den konvergerar likformigt~~

konvergerar likformigt för $t \in (-\varepsilon^2, \|f\|^2 + 1)$.

~~Do~~ Välj N så stort att

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n \left(t - \frac{\|f\|^2}{2}\right)^n - \sqrt{\varepsilon^2 + t} \right| < \varepsilon \quad \text{för alla } t \in [0, \|f\|^2]$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(1 - \frac{\|f\|^2}{2}\right) - \sqrt{\varepsilon^2 + t} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \qquad \sqrt{t} \right| < 2\varepsilon$$

Sats [Stone – Weierstrass] $\mathcal{M}$ kompakt metriskt rum

$\mathcal{A} \subset C^0(\mathcal{M})$ funktionsalgebra

i) ~~f,g~~ $x \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq 0$

ii) $x, y \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq f(y)$

Då kommer $\overline{\mathcal{A}} = C_0(\mathcal{M})$

Bevis: Vi vet att $|f| \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow \sup(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$

så $\overline{\mathcal{A}}$ är ett lattice så $\overline{\mathcal{A}} = C^0(\mathcal{M})$

om det för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $a, b \in \mathcal{M}$, $x \neq y$,

$\exists f \in \overline{\mathcal{A}}$ så att $f(a) = \alpha \quad f(b) = \beta$

Men då $f(a) \neq f(b)$ så kommer $\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{f(a)}$

(alt. $\frac{f(x)}{f(b)}$) då kommer $\hat{f}(a) = 1 \quad \hat{f}(b) \neq (\hat{f}(b))^2$

så TRIST...

Följdsats (Weierstrass). ~~[illegible]~~

Varje $f \in C^0([a,b])$ kan approximeras godtyckligt nära med ~~ett~~ polynom. Dvs.

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}$ polynom så $\|f-p\| < \varepsilon$.

Bevis: Alla polynom bildar en funktionsalgebra.

Och för a, och b så $(x-a)+1 = p(x)$ att separera punkterna a & b

Och $p(x)=1$ försvinner inte i någon punkt.

$\blacksquare$

Weierstrass thm Second proof..

Hjälpsats: Antag att f är likformigt kont. på $\mathbb{R}$ och begränsad

$K_j(x)$ (positiva integrationskärnor):

i) $K_j(x) \geq 0 \quad x \in [-1, 1]$ (eller $\mathbb{R}$)

ii) $\int_{-1}^{1} K_j(x)dx = 1$ alla j

iii) $K_j(x) \to 0$ likformigt på $[-1, 1] \setminus (-\delta, \delta)$ alla j

Då $\int_{-1}^{1} f(x-t) K_j(t) dt \rightrightarrows f(x)$ då $j \to \infty$

Bevis: $\left| \int_{-1}^{1} f(x-t) K_j(t)dt - f(x) \right| =$

(1) $= \left| \int_{-1}^{1} (f(x-t) - f(x)) K_j(t) dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)| K_j(t) dt$

Välj $\delta > 0$ så att $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ för $|t| < \delta$, då f är likformigt så är detta oberoende av x.

(1) kan då skrivas

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x-t)K_j dt - f(x) \right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{<\varepsilon} K_j(t)dt + \int_{[-1,1]\setminus(-\delta,\delta)} |f(x-t) - f(x)| K_j(t)dt$$

$\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} K_j(t)dt + \varepsilon < 2\varepsilon$ om j är stort.

Bevis 2: Weierstrass.

~~Sätt f.~~ Antag att $f(-1) = f(1) = 0$,

~~[illegible]~~ då kan vi utvidga def mängden av f

$$f(x) = \begin{cases} f & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$ så $f(x)$ blir

kontinuerlig, likformigt kont. funktion då

$f(x)$ är likformigt kont på $[-2, 2]$ och

konstant $= 0$ för $x > 2$.

~~[illegible]~~ Vidare låter vi

$K_n(x) = \beta_n (1 - x^2)^n \geq 0$ på $[-1, 1]$

och vi väljer β_n så $\int_{-1}^{1} K_n(x)\,dx = 1$

~~[illegible]~~ Satsen följer om

i) $K_n \rightrightarrows 0$ på $[-1,1] \setminus (-\delta, \delta)$ $\forall \delta > 0$

ii) $\int_{-1}^{1} f(x-t) K_n(t)\,dt$ är ett polynom.

Men ii) följer direkt eftersom

$$\int_{-1}^{1} f(x-t) K_n(t)\,dt = \int_{x+1}^{x-1} f(t) \underbrace{K_n(x-t)}_{\text{polynom i } x \,=\, \sum a_k(t) x^k}\,dt = x^k \sum \int_{x+1}^{x-1} f(t)\, a(t)\,dt = \text{poly}.$$

För att se att K_n är en pos. def. kärna så

måste vi veta något om β_n. Men

$$\frac{1}{\beta_n} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx > \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} \underbrace{(1-x^2)^n}_{\geq (1-n)^n}\,dx > \frac{2}{\sqrt{n}} \underbrace{(1-n)^n}_{\to \frac{1}{e}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{om } n \gg 1$$

så $\beta_n < \sqrt{n}$.

Men det medför att om $x > \delta$ så

$$K_n(x) = \beta_n (1-x^2)^n < \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n \to 0$$

så $K_n \rightrightarrows 0$ ~~för att~~ $|x| > \delta$.

$\blacksquare$

Slut. Om $f(-1) \neq 0 \neq f(1)$ sätt

$$\hat{f}(x) = f(x) - \left(\frac{f(1)-f(-1)}{2}(x+1) + f(-1)\right)$$

då $\hat{f}(x)$ att kunna approximeras med poly.

men $\hat{f} + \left(\frac{f(1)-f(-1)}{2}(x+1) + f(-1)\right) = f(x)$

$\boxtimes$