

SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 17

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 december 2016

Dagens teman från kap 7

- 1 Ortogonala baser, Gram-Schmidts metod
- 2 Ortonormala baser
- 3 Ortogonala matriser

(På fredag: minstakvadratmetoden)

Definition ortogonal:

En mängd vektorer, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är **ortogonal** om alla skalärprodukter $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ när $i \neq j$.

Definition ortonormal:

En mängd vektorer, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är **ortonormal** om den är ortogonal och alla \vec{v}_i har längd 1.

Exempel:

1. Avgör om mängden $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$ är ortogonal.
2. Kan man skala om vektorerna i B så att man får en mängd B' som är ortonormal?

Sats om koordinater i en ortonormal bas (ON-bas):

Om $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ är en ortonormal bas (ON-bas) för \mathbf{R}^n och \vec{x} är en vektor i \mathbf{R}^n så kan \vec{x} skrivas:

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_n)\vec{v}_n$$

dvs den i :te koordinaten för \vec{x} är $\vec{x} \cdot \vec{v}_i$.

Exempel/övning:

1. Kontrollera att mängden $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

är en ON-bas för \mathbf{R}^3

2. Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i basen B .

Definition av ortogonala matriser:

En $n \times n$ -matris P sådan att $P^T P = I$ sägs vara en **ortogonal matris**.

Med andra ord: För en ortogonal matris P gäller att $P^T = P^{-1}$.

Sats om ortogonala matriser:

Följande villkor är ekvivalenta för en $n \times n$ -matris P :

1. P är ortogonal, dvs $P^T P = I$
2. P 's kolonner utgör en ortonormal mängd vektorer
3. P 's rader utgör en ortonormal mängd vektorer

Exempel/Övning:

Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Definition av ortogonalt komplement

Låt S vara ett delrum av \mathbf{R}^n . Vi säger att en vektor \vec{v} är ortogonal mot S om

$$\vec{v} \cdot \vec{s} = 0, \quad \text{för alla } \vec{s} \in S$$

Mängden av alla vektorer som är ortogonala mot S kallas för ortogonala komplementet till S och skrivs S^\perp .

Observation: Om $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är en bas för S så är

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0 \text{ för } 1 \leq j \leq k\}$$

Exempel/Övning

Vi är i \mathbf{R}^4 . Låt $S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm S^\perp

Sats

Låt S vara ett k -dimensionellt delrum av \mathbf{R}^n . Då gäller att

1. $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$
2. $\dim S^\perp = n - k$
3. Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ är en ortonormal bas för S och $\{\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ är en ortonormal bas för S^\perp så är $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ en ortonormal bas för \mathbf{R}^n .

Definition av projektion på delrum

Låt S vara ett k -dimensionellt delrum av \mathbf{R}^n och låt $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ vara en ortonormal bas för S . Projektionen av en vektor \vec{x} i \mathbf{R}^n på S definieras genom

$$\text{proj}_S \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \vec{v}_k$$

Vi har också projektionen perpendikulärt mot S :

$$\text{perp}_S \vec{x} = \vec{x} - \text{proj}_S \vec{x}$$

Approximationssatsen

Låt S vara ett delrum av \mathbf{R}^n . För alla \vec{x} i \mathbf{R}^n så är $\text{proj}_S \vec{x}$ den unika vektor i S som minimerar avståndet till \vec{x} .

Gram-Schmidts metod

Gram-Schmidts metod är en metod att utifrån en bas, vilken som helst, skapa en ortogonal bas (som sedan förstås också kan skalas till en ortonormal bas)

Givet alltså en bas $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ för S .

Steg 1. Sätt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$

Steg 2. Sätt $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$

Steg 3. Sätt $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2$

Och så vidare! Efter k steg har vi en ortonormal bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ för S .

Exempel/Övning

Finn en ortonormal bas för $S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$