



# EL1010 Reglerteknik AK

## Föreläsning 10: Regulatorstrukturer





# Kursinfo: Tentamen EL1010

- Ordinarie tentamenstillfälle EL1010 är måndagen den 16/1 kl. 8.00-13.00
- Obligatorisk föranmälan ska ske senast **31 december** på Mina sidor (Mina sidor-Tentamen-Mina tentor)
- Omtentamen går (preliminärt) tisdagen den 11/4 kl.14.00-19.00
- **OBS!** Ej tenta för de som är registrerade på EL1000



# Kursinfo: Räknestugor

- Resterande räknestugor:
  - 161205, 10-12 Q11
  - 161209, 10-12 Q22
  - 161212, 8-10 V35
  - 161212, 10-12 V35
  - 170112, 10-12 B1
  - 170113, 10-12 D36
- Bra tillfälle att räkna och få svar på frågor inför Lab2, Lab3 och tentan



# Kursinfo: Resterande kursprogram

- Föreläsning 10 (idag): Regulatorstrukturer
- Föreläsning 11 (imorgon tisdag): Implementering
  - Föreläsning hålls av Elling Jacobsen
- Föreläsning 12 (onsdag): Sammanfattning
  - Repetition enligt önskemål (skicka önskemål till [hsan@kth.se](mailto:hsan@kth.se) senast idag)
  - Lösning av tentatal



# Dagens program

- **Tillståndsåterkoppling och observatör (repetition, slides)**
- Tillståndsåterkoppling med observatör (tavlan)
- Kaskadregulator (tavlan, slides)



# Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

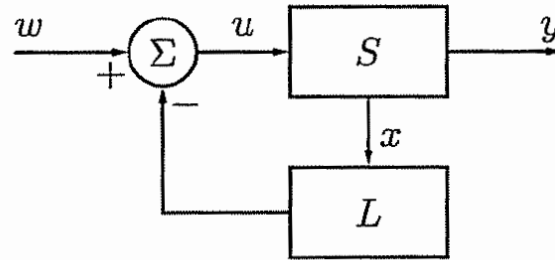
- Vektorn  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  kallas systemets tillstånd
- $x(t)$  innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida  $y(t)$ , givet framtida  $u(t)$
- Lösningsformel:
$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$
- Matrisexponentialfunktion:  $e^{At}$

# Tillståndsåterkoppling

- Antag att vi kan mäta alla tillstånd  $x$ . Återkoppla med allt vi kan mäta!

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

$$L = (l_1 \quad \dots \quad l_n)$$

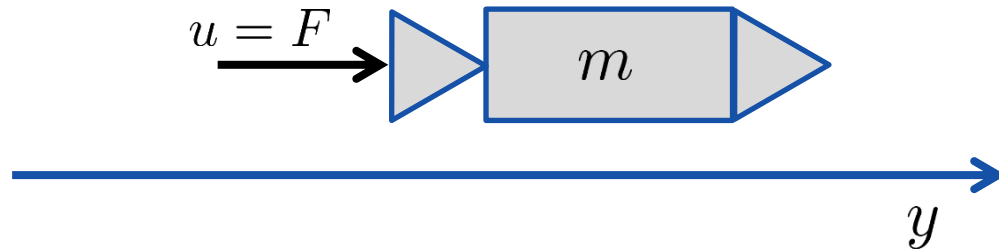


Slutna systemets poler ges av  $\det(sI - A + BL) = 0$

- $n$  ekvationer och  $n$  obekanta ( $L$ )
- Lösbart ekvationssystem om  $S$  styrbart
- Polerna (egenvärdena) kan läggas var du vill!

$$G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1} B l_0$$

## Exempel från Föreläsning 9: Raketten



- Vi vill styra raketens position  $y(t)$  till referenspositionen  $r(t)$  genom att variera dragkraften  $u(t)$
- Antag att vi kan mäta positionen  $y(t)$  och farten  $\dot{y}(t)$





## Exempel från Föreläsning 9: Raketten

$$\begin{aligned} x_1 = y &= \text{raketens position} & \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u \\ x_2 = \dot{y} &= \text{raketens fart} & y &= (1 \quad 0) x \end{aligned}$$

$$\text{Tillståndsåterkoppling: } u = -(l_1 \quad l_2)x + l_0 r$$

Välj var polerna ska ligga. T.ex., välj  $\omega_0$  och  $\zeta$  och ansätt:

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{Jämför med } \det(sI - A + BL) = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{l_2}{m}s + \frac{l_1}{m} = 0$$

$$\Rightarrow l_1 = m\omega_0^2, \quad l_2 = 2m\zeta\omega_0, \quad (l_0 = m\omega_0^2)$$

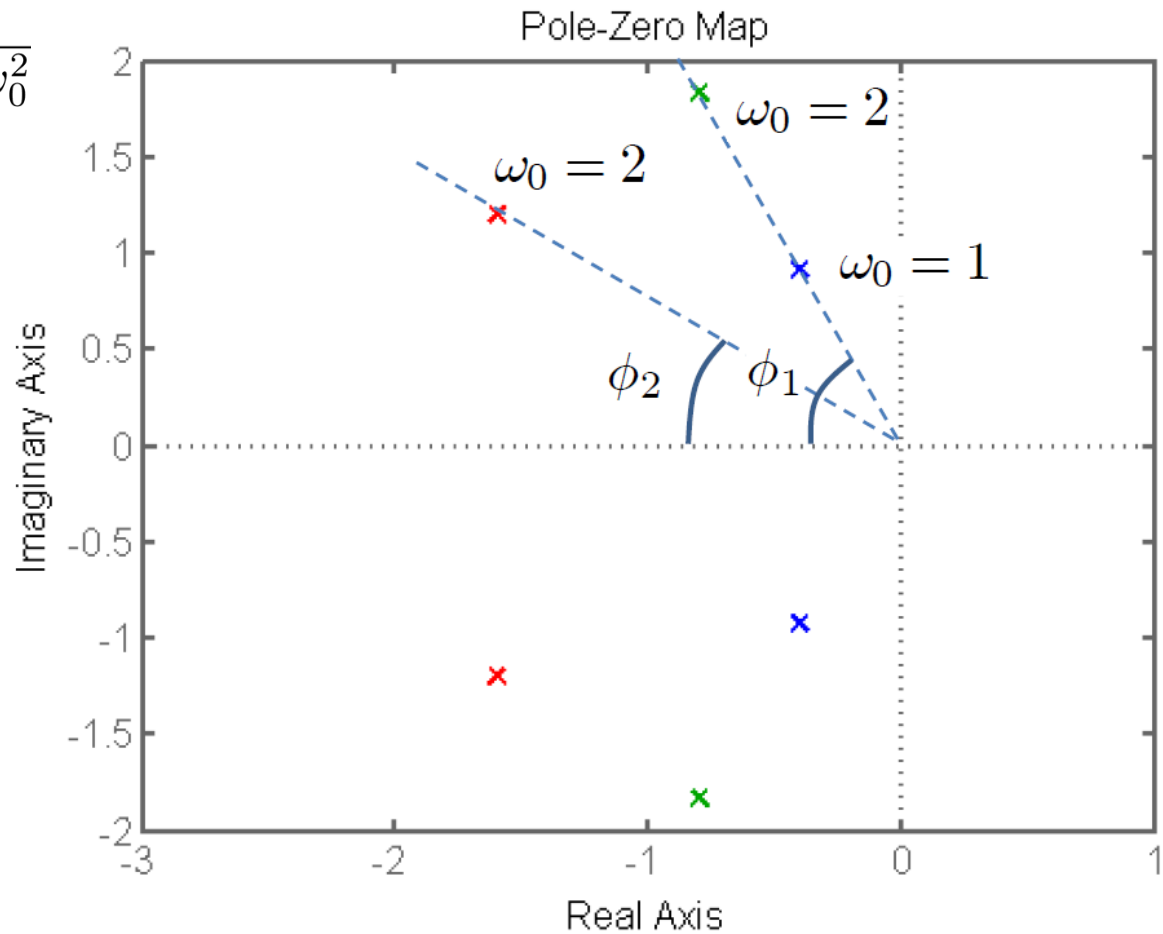
# Slutna systemets poler

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



# Slutna systemet: Steg i referensen $r(t)$

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

Snabbhet:  $\sim 1/\text{stigtid} \approx \omega_0 e^{-\phi/\tan(\phi)}$

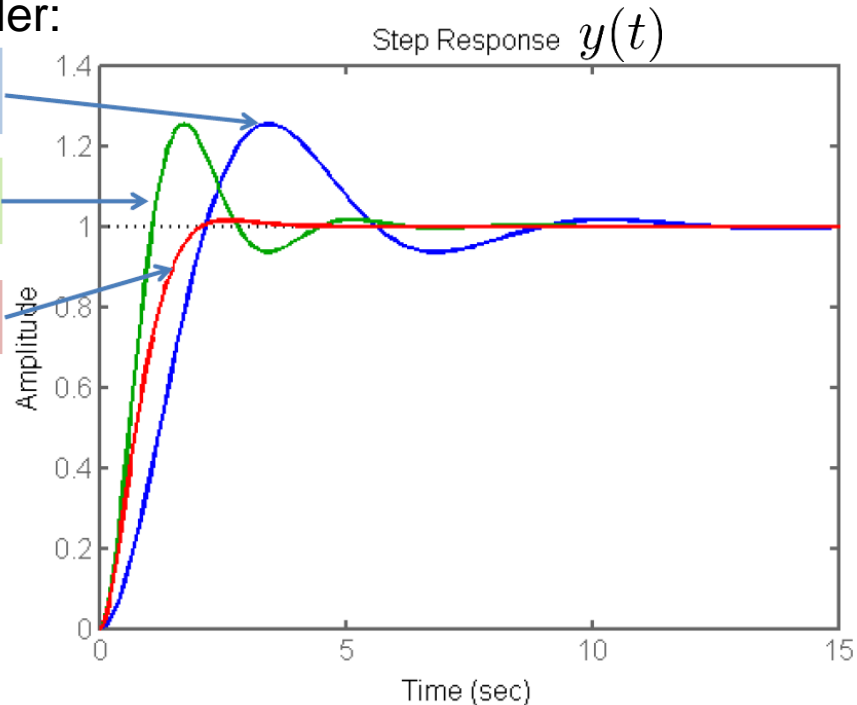
Dämpning:  $\sim 1/\text{översläng} \approx e^\alpha, \alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Tre olika val av poler:

$$\omega_0 = 1, \zeta = 0.4$$

$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.4$$

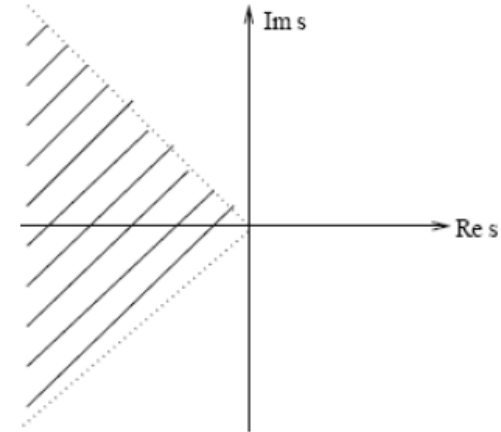
$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.8$$



(Glad & Ljung:  
Exempel 3.3)

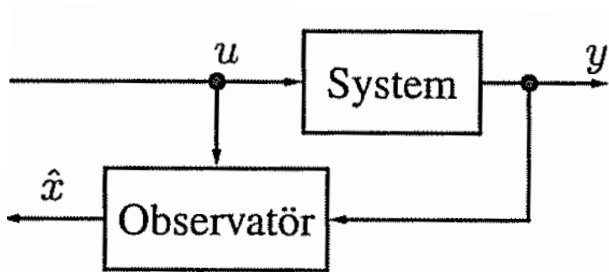
## Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
  - Önskad snabbhet och dämpning
  - Begränsningar på styrsignalens storlek
  - Robusthet (mot modellfel)
  - Känslighet (mot yttre störningar och brus)
- Allmänna råd:
  - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
  - Poler närmast origo viktigast
  - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning



# Observatör

Vad göra om  $x$  inte kan mätas? Konstruera en observatör



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$

Skattningsfelsdynamik styrs av egenvärdena  $\det(sI - A + KC) = 0$

- $\tilde{x}(t) = e^{(A-KC)t} \tilde{x}(0)$ , där  $\tilde{x}(0)$  är initialt skattningsfel
- $n$  ekvationer och  $n$  obekanta ( $K$ )
- Lösbart ekvationssystem om system *observerbart*
- Egenvärdena kan läggas var du vill!



## Observerbarhet (Resultat 8.9)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

**Tillståndsmodell observerbar:** Finns inget initialtillstånd  $x(0) = x^* \neq 0$  så att  $y(t) = 0, t \geq 0$ , då  $u(t) = 0, t \geq 0$

$\Leftrightarrow$

Observerbarhetsmatrisen  $\mathcal{O}$  har full rang

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$



# Quiz

(1) Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

observerbar?



# Quiz

(2) Antag att en observatör för systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska konstrueras.

Hur ska  $k_1$  och  $k_2$  väljas så att skattningsfelsdynamikens egenvärden hamnar i  $\{-2 - 2i, -2 + 2i\}$ ?

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$
$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$
$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$





# Quiz

(3) Vad är polerna till  $G_c(s)$  om

$$\lambda_i(A - BL) = \{-2 + 2i, -2 - 2i\}$$

$$\lambda_i(A - KC) = \{-4, -4\}$$



# Dagens program

- Tillståndsåterkoppling och observatör (repetition, slides)
- **Tillståndsåterkoppling med observatör (tavlan)**
- Kaskadregulator (tavlan, slides)



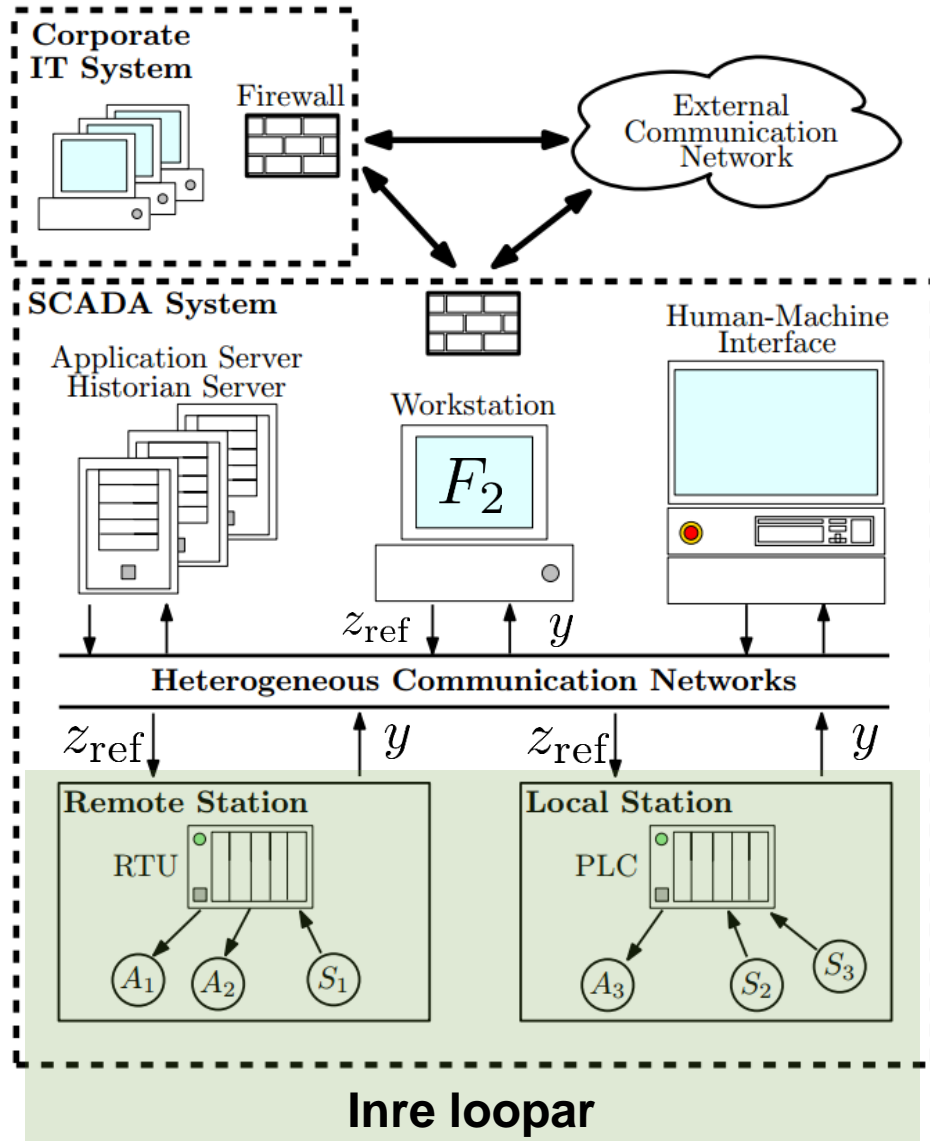
# Dagens program

- Tillståndsåterkoppling och observatör (repetition, slides)
- Tillståndsåterkoppling med observatör (tavlan)
- **Kaskadregulator (tavlan, slides)**

# Exempel: SCADA-system

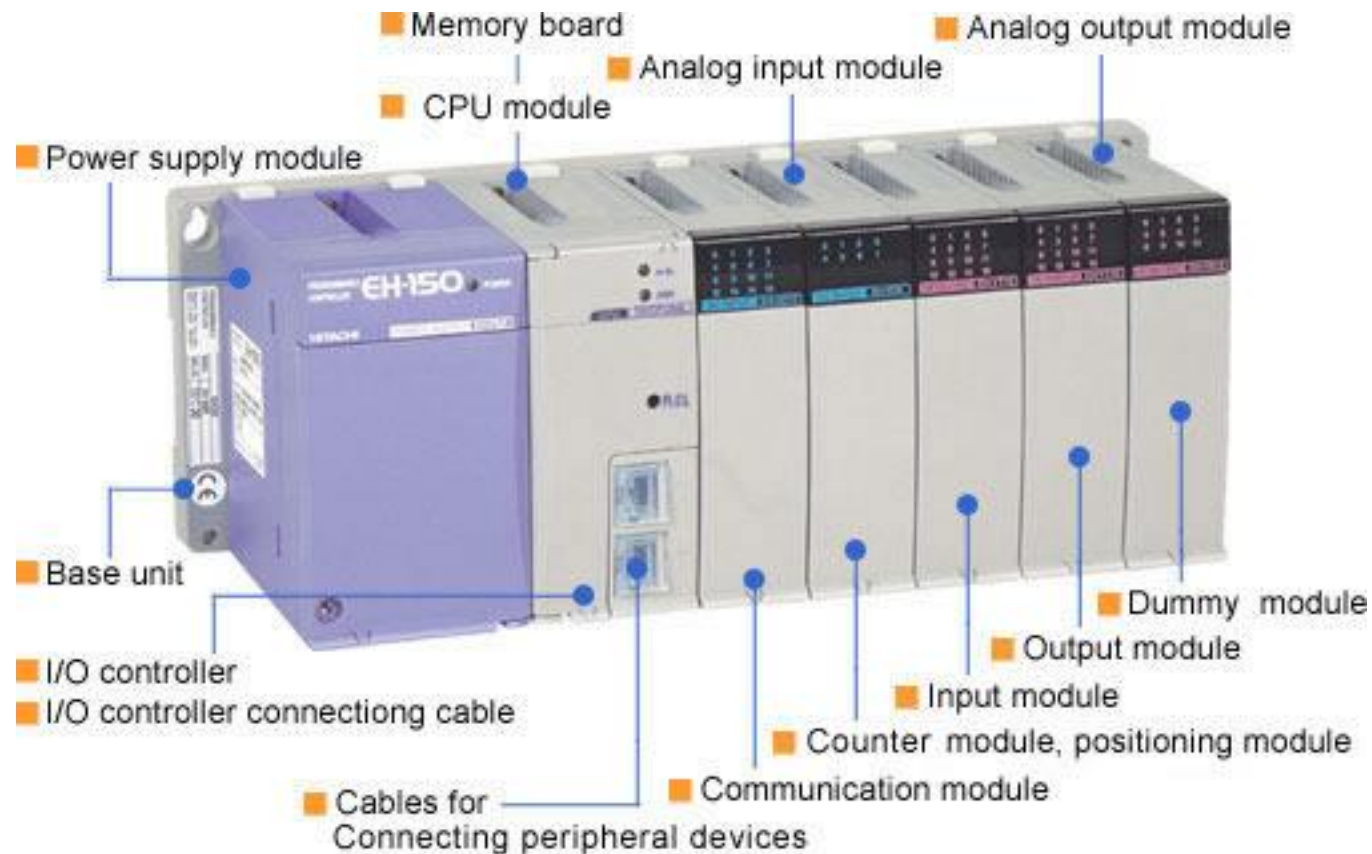
**S** Supervisory  
**C** Control  
**A** And  
**D** Data  
**A** Acquisition

Kommunikationssystem för  
 styrning och övervakning  
 av industriella styrsystem  
 och kritisk infrastruktur



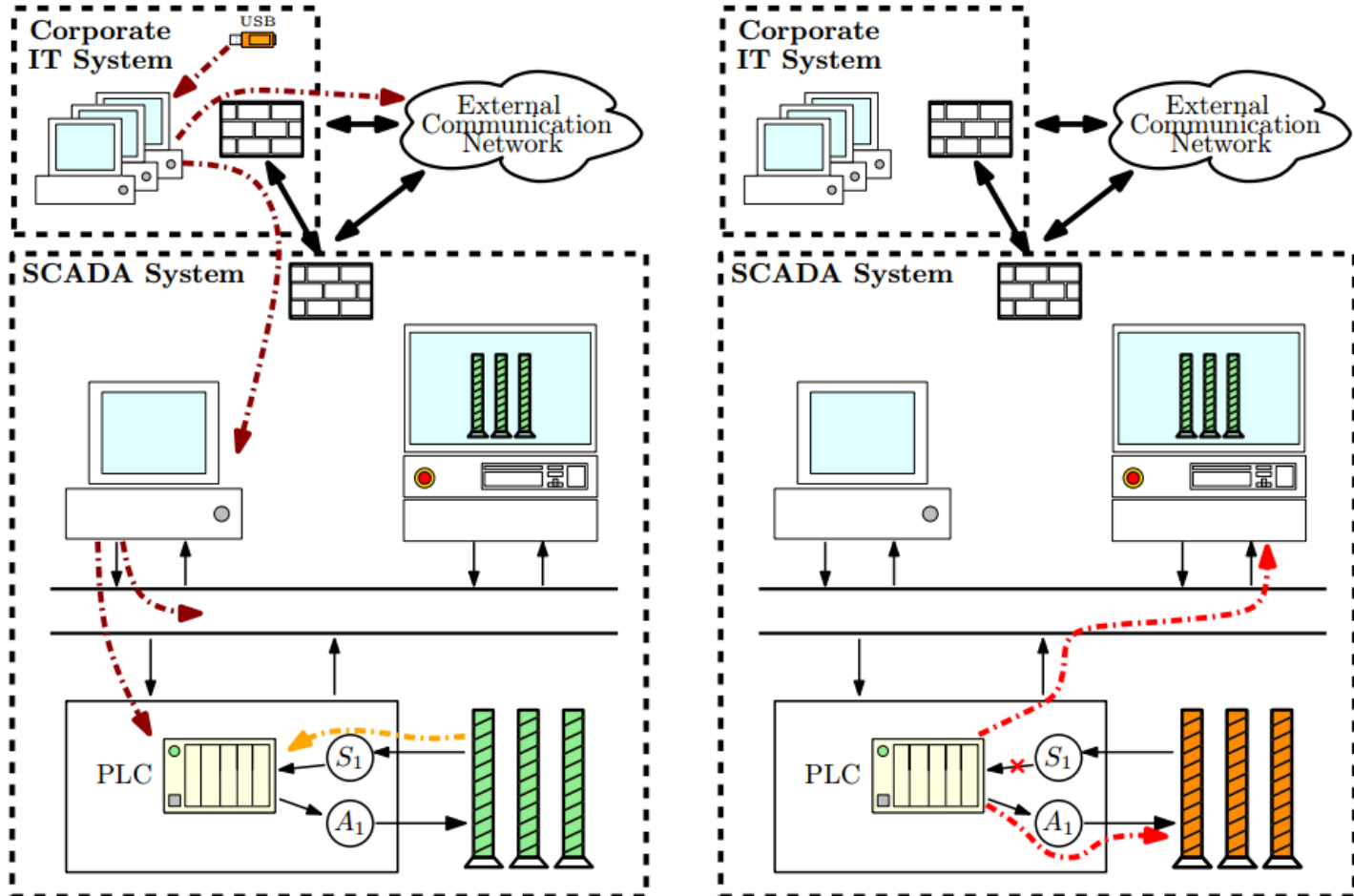
# Programmable Logic Controller (PLC)

Inre reglerloopar styrs ofta med hjälp av PLC



# Aktuell forskning: Cybersårbarheter i SCADA-system

Exempel: Stuxnet-attacken 2010





# Aktuell Tv-dokumentär: Zero Days

<http://www.svt.se/dox/alla-dokumentarer/>

## Zero Days

Sändes: **sön 20 nov** Tillgänglig: **19 dagar kvar**

USA och Israel skapade 2009 dataviruset Stuxnet i syfte att slå ut delar av Irans kärnvapenprogram. Problemet var bara att viruset snabbt spreds i andra datasystem och blev ett hot också mot dem som skapat det. Trots att ingen ansvarig vill bekräfta dess existens lyckas filmaren Alex Gibney skildra cyberkriget inifrån och visa hur svårt det är att kontrollera och vilka konsekvenser det kan få om det tillåts eskalera.

Kan endast ses i Sverige

→ [Om videorättigheter](#)

**REPRISER I TV**

Det här avsnittet kan du inte se i tv



Myndigheten för  
samhällsskydd  
och beredskap

# Vägledning till ökad säkerhet i industriella informations- och styrsystem



CERCES – Center för resilianta kritiska infrastrukturer  
([www.kth.se/ees/cerces](http://www.kth.se/ees/cerces))





## Quiz

(4) Antag inre loopen i en kaskadreglering har överföringsfunktionen

$$Z(s) = \frac{K_1}{s + 1 + K_1} Z_{\text{ref}}(s)$$

där  $K_1$  är dess P-regulatorförstärkning.

Hur kan inre loopen approximeras om vi antar att regulatorn har hög förstärkning och referensen  $z_{\text{ref}}(t)$  är lågfrekvent?