December 7, 2016. Föreläsning 24

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Symmetriska matriser
- Kvadratiska former

1. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Följande är ekvivalenta:
   (1) A är symetrisk ($A = A^T$).
   (2) Det finns en ortonormal bas som består av eigenvektoerer
   (3) Det finns en ortogonal matris S så att $S^T AS$ ar diagonal.

2. **Proposition.** En symmetrisk matris A kan altid diagonaliseras. Eigenvektoerna till en symmetrisk matris som motsvarar olika eigenvärden är ortogonala till varandra.

3. **Proposition.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   (1) Kan A diagonalizeras?
   (2) Bestäm en bas som består av eigenvektorerna till A.
   (3) Bestäm en ortonormal bas som består av eigenvektorerna till A.
   (4) Beräkna A^{100}.

4. **Proposition.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

   (1) Kan A diagonalizeras?
   (2) Bestäm en bas som består av eigenvektorerna till A.
   (3) Bestäm en ortonormal bas som består av eigenvektorerna till A.
   (4) Beräkna A^{100}.

5. **Definition.** Betrakta en $n \times n$ symmetrisk matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Följande funktion $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kallas för en kvadratistk form:

$$Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T A\vec{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j$$

och A kallas för standardmatrisen till kvadratistka formen Q.

- Formen Q kallas för diagonal om $a_{ij} = 0$ for alla $i \neq j$, dvs, om:
$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
- Formen Q kallas för positive definite om $Q(\vec{x}) > 0$ för alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.
- Formen Q kallas för negative definite om $Q(\vec{x}) < 0$ för alla $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.
- Formen Q kallas för indefinite om $Q(\vec{x}) < 0$ för någon $\vec{x}$ och $Q(\vec{y}) > 0$ för någon $\vec{y}$.

6**. Uppgift.** Bestäm matriser till följande kvadratiska former och undesök om de är positive definite, negative definite eller indefinite:

- $3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$.
- $2x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^3 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 7x_2x_3$.
- $3x_1^2 - 2x_2^2 + 9x_3^2$.

7**. Definition.** Låt β vara en bas i $\mathbb{R}^n$. Betrakta en kvadratisk form Q. Matrisen till Q i bas β är en unik symetrisk matris M så att:
$$Q(\vec{x}) = [\vec{x}]_\beta^T M[\vec{x}]_\beta$$
Om M är matrisen till q i bas β, då funktionen $\vec{x} \mapsto \vec{x}^T M\vec{x}$ kallas för kvadratiska formen Q i bas β.

8**. Proposition.** Låt A vara standardmatrisen till kvadratistka formen Q och β vara en bas till $\mathbb{R}^n$. Då matrisen till Q i bas β är lika med:
$$T_{\beta\to E}^T A T_{\beta\to E}$$
Anledningen till detta är likheten $T_{\beta\to E}[\vec{x}]_\beta = \vec{x}$ som ger:
$$Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T A\vec{x} = (T_{\beta\to E}[\vec{x}]_\beta)^T A T_{\beta\to E}[\vec{x}]_\beta = [\vec{x}]_\beta^T T_{\beta\to E}^T A T_{\beta\to E}[\vec{x}]_\beta =$$
$$= [\vec{x}]_\beta^T (T_{\beta\to E}^T A T_{\beta\to E})[\vec{x}]_\beta$$

9**. Uppgift.** Betrakta en kvadratisk form $Q = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 1x_2^2$ och en bas $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Bestäm matrisen till Q i bas β. Bestäm Q i bas β.

10**. Proposition.** Låt A vara en $n \times n$ symmetrisk matris och Q symmetriska formen ges av A. Lå β vara en ortonormal bas som består av eigenvektorer till A med eigenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Då $T_{\beta\to E}$ är ortogonal matris (dvs. $T_{\beta\to E}^T = T_{\beta\to E}^{-1}$) och därför matrisen till Q med avseende på β ges av:
$$T_{\beta\to E}^T A T_{\beta\to E} = T_{\beta\to E}^{-1} A T_{\beta\to E} = [A]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
Alstå alla kvadratiska former kan diagonaliseras och

- Q är positive definite om och endast om $\lambda_i > 0$ för alla eigenvärden till A.

- Q är negative definite om och endast om $\lambda_i < 0$ för alla eigenvärden till A.
- Q är indefinite om det fins ett eigenvrde $\lambda_i < 0$ och ett eigenvärde $\lambda_j > 0$.

11. **Uppgift.** Betrakta följande symmetriska matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm kvadraiska former som ges av matriser A och B. Bestäm om formerna är positive definite eller negative definite eller indefinite. Diagonalisera formerna.