SF1624 Algebra och geometri
Föreläsning 15

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

2 december 2016

Egenvärden och egenvektorer, kap 6.1

1. Vad är det?
2. Hur räknar man ut det?
3. Vad ska man ha det till?

Varför egenvärden och egenvektorer?

Motiverande exempel.

1. I vilken bas är matrisen för en linjär avbildning enklast?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. Hur räknar man enklast ut A^{100} om A är en 3×3-matris?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{100} \quad \text{vs} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{100}$$

Trixet är: Byt till en bas av egenvektorer!

Definition

Låt $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning som ges av standardmatrisen A.

Om det finns en vektor $\vec{v}$ (som INTE får vara $\vec{0}$) och ett tal λ (som FÅR vara 0) så att

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

så sägs λ vara ett egenvärde till avbildningen T (matrisen A) och $\vec{v}$ vara en egenvektor till T (A) hörande till egenvärdet λ.

Lite arbete

1. Avgör om någon av vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är egenvektor till avbildningen T som ges av standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ och bestäm i så fall också egenvärdet.
2. Låt $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i projektion på linjen $y = x$. Har denna avbildning några egenvektorer? Vad är i så fall deras egenvärden?
3. Låt $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i rotation $\pi/2$ radianer moturs runt origo. Har denna avbildning några egenvektorer? Vad är i så fall deras egenvärden? Motsvarande fråga för rotation θ radianer.

Hur hittar man egenvektorer och egenvärden?

Resonemang:

1. Givet matris A söks $\vec{v}$ och λ så att

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

2. Samma ekvation kan skrivas så här:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

3. Homogent linjärt ekvationssystem! Icke-trivial lösn för $\vec{v}$ när

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. Egenvärdena λ är alltså lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa värden på λ kan sedan sättas in i ekvationssystemet $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ vars lösningar är egenvektorer.

(Obs att man måste lösa ett ekvationssystem per egenvärde.)

Hur hittar man egenvektorer och egenvärden?

Resonemang:

1. Givet matris A söks $\vec{v}$ och λ så att

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

2. Samma ekvation kan skrivas så här:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

3. Homogent linjärt ekvationssystem! Icke-trivial lösn för $\vec{v}$ när

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. Egenvärdena λ är alltså lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa värden på λ kan sedan sättas in i ekvationssystemet $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ vars lösningar är egenvektorer.

(Obs att man måste lösa ett ekvationssystem per egenvärde.)

Uppgift

Hitta alla egenvärden och egenvektorer till matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 1 & 8 & -8 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Uppgifter/Exempel

1. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som speglar alla vektorer i y-axeln.
2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildning $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$som speglar alla vektorer i xy-planet.
3. Bestäm i valfri bas matrisen för den linjära avbildning som består i projektion av alla vektorer i $\mathbf{R}^3$ på planet med ekvation $x - 2y + 3z = 0$.

Diagonalisering av matriser

Givet en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med standardmatris A. Anta att vi kan hitta en bas $\mathcal{F}$ för $\mathbf{R}^n$ som består uteslutande av egenvektorer till T. Bilda basbytesmatrisen P som har dessa egenvektorers koordinater i standardbasen som kolonner. Då gäller att

$$D = P^{-1}AP$$

där D är den diagonalmatris som har egenvärdena på diagonalen och alla andra element 0. Denna diagonalmatris D är då matrisen för T i basen $\mathcal{F}$.

Omvänt gäller: Om vi kan diagonalisera matrisen A med hjälp av någon matris P så existerar det en bas för $\mathbf{R}^n$ som bara består av egenvektorer till A

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Matriser A och B som är relaterade genom ett samband

$$B = P^{-1}AP$$

kallas similära matriser, skrivs $A \sim B$. Similära matriser har en del egenskaper gemensamma:

1. De har samma egenvärden
2. De har samma determinant
3. De har samma rang
4. De har samma spår (summan av diagonalelementen)

Diagonalisering av matriser, forts

Lite terminologi och observationer: Mer att ta upp kring egenvärden, egenvektorer och diagonalisering:

1. Egenrum hörande till egenvärden
2. Egenvärdens algebraiska resp geometriska multiplicitet
3. Egenvektorer till *olika* egenvärden är linjärt oberoende
4. $n \times n$ -matriser med n olika egenvärden är diagonaliserbara