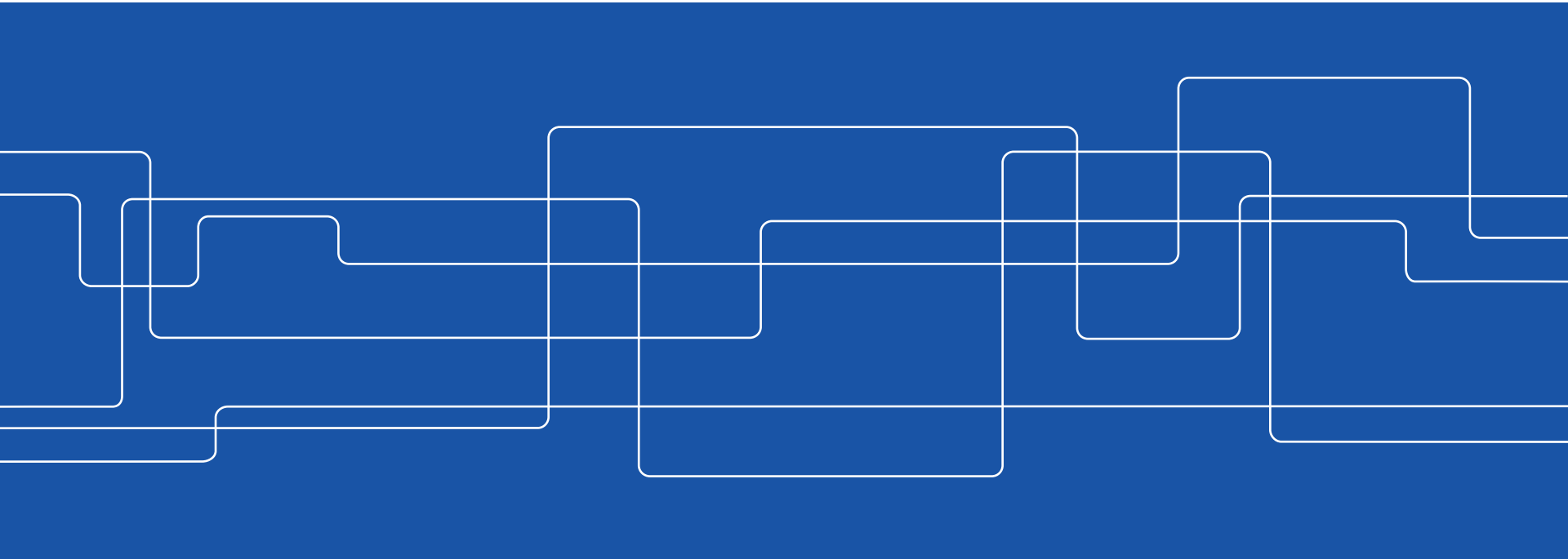




EL1010 Reglerteknik AK

Föreläsning 9:
Tillståndsåterkoppling och observatör





Kursinfo: Tentamen EL1010

- Ordinarie tentamenstillfälle EL1010 är måndagen den 16/1 kl. 8.00-13.00
- Obligatorisk föranmälan ska ske senast **31 december** på Mina sidor (Mina sidor-Tentamen-Mina tentor)
- Omtentamen går (preliminärt) tisdagen den 11/4 kl.14.00-19.00
- **OBS!** Ej tenta för de som är registrerade på EL1000



Tips inför Lab 2 och Lab 3

- Förstärkning anges ofta i decibel (dB) i Matlab:

$$|G(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(i\omega)| \text{ dB}$$

$$|G_o(i\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB (skärfrekvens)}$$

$$|G_c(i\omega_B)|_{\text{dB}} \approx -3 \text{ dB (bandbredd)}$$

- Flera av övningarna är till stor hjälp för att lösa uppgifterna i Lab 3. T.ex.:
 - Kompensering: Övning 5.13
 - Tillståndsåterkoppling: Övning 9.14



Dagens program

- Lösning av tillståndsekvation (repetition, slides)
- Styrbarhet och observerbarhet (repetition, slides)
- Tillståndsåterkoppling (tavlan)
- Observatör (tavlan)

Optimering av kvadratiska kriterier, Glad & Ljung kapitel 9.3 ingår ej. Se fortsättningskurser i reglerteknik.



Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$
- Lösningsformel:
$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$
- Matrisexponentialfunktion: e^{At}



Styrbarhet (Resultat 8.8)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tillståndsmodell styrbar: Kan styra från $x(0) = 0$ till vilket tillstånd $x(T) = x^*$ som helst m.h.a. u , på ändlig tid T

\Leftrightarrow

Styrbarhetsmatrisen \mathcal{S} har full rang

$$\mathcal{S} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

\Leftrightarrow

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0$$



Observerbarhet (Resultat 8.9)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tillståndsmodell observerbar: Finns inget initialtillstånd $x(0) = x^* \neq 0$ så att $y(t) = 0, t \geq 0$, då $u(t) = 0, t \geq 0$

\Leftrightarrow

Observerbarhetsmatrisen \mathcal{O} har full rang

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

\Leftrightarrow

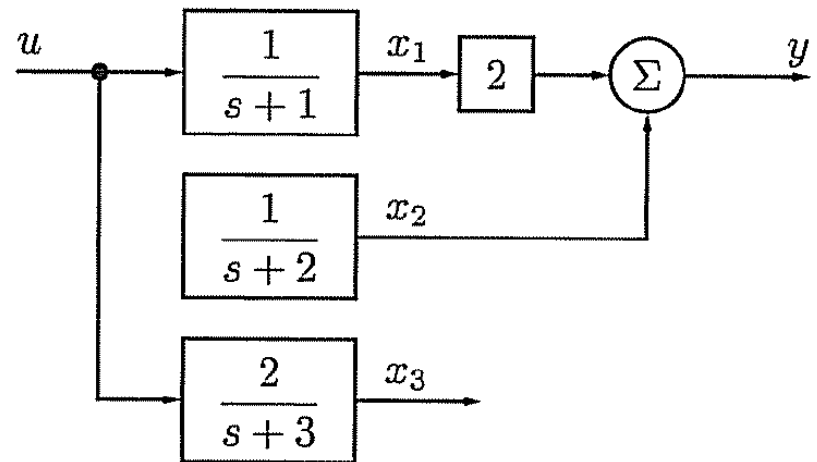
$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$

Exempel från Föreläsning 8

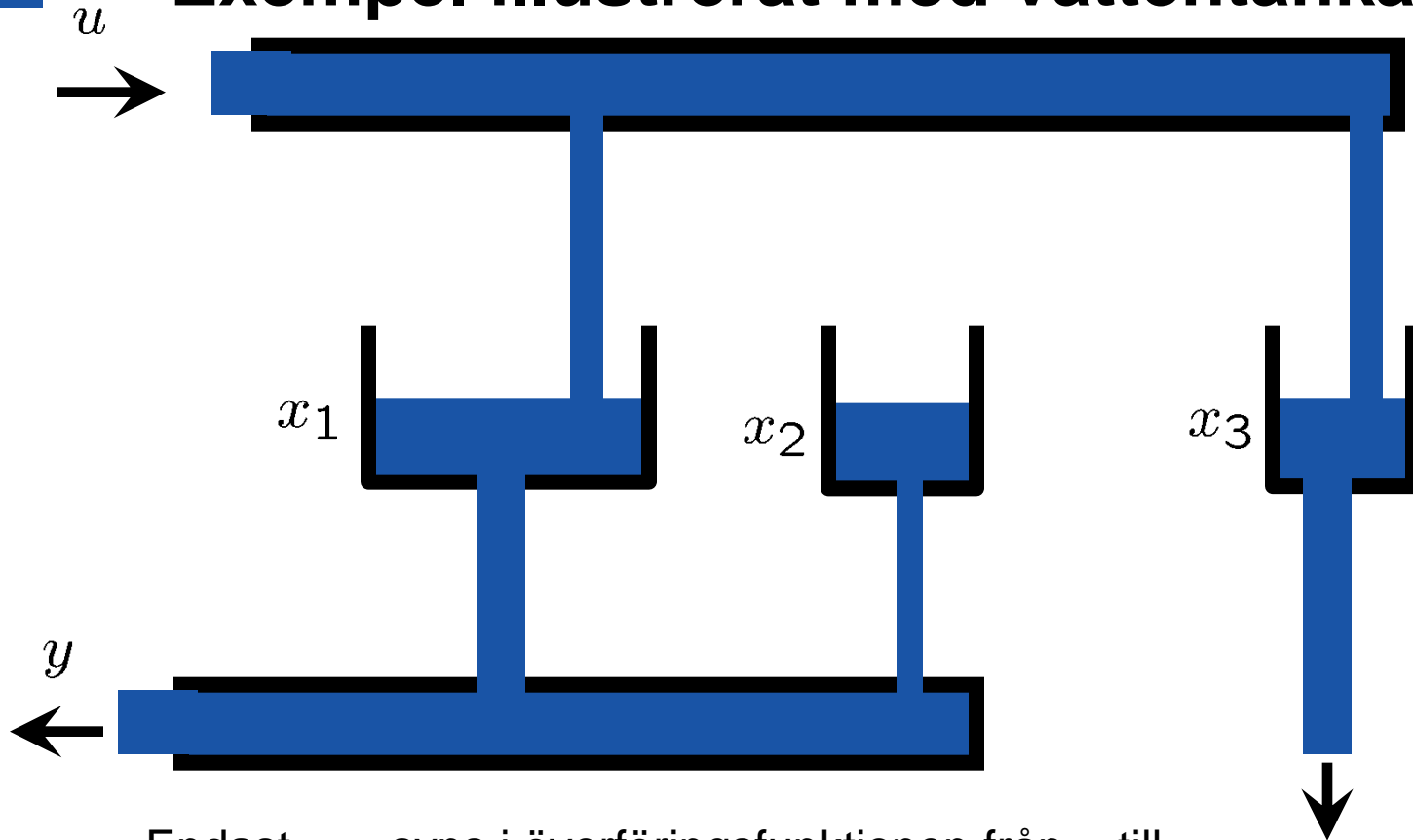
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

x_2 ej styrbar
 x_3 ej observerbar



Exempel illustrerat med vattentankar



Endast x_1 syns i överföringsfunktionen från u till y
 x_2 påverkas ej av u
 x_3 syns ej i y



Minimala tillståndsmodeller (Resultat 8.11)

- Förkortningar av poler och nollställen i $G(s)$ beror på icke-observerbara eller icke-styrbara tillstånd
- Minimala tillståndsmodeller: Alla tillstånd styrbara och observerbara
 $\det(\mathcal{S}) \neq 0$ och $\det(\mathcal{O}) \neq 0$
- $G(s)$ ger en **yttre** beskrivning av systemet (bara in- och utsignaler)
- Tillståndsmodellen ger en **inre** beskrivning av systemet ("vad händer inuti blocket i schemat?")

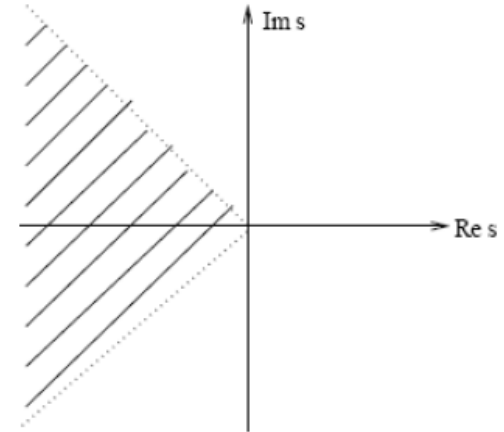


Dagens program

- Återkoppling från systemets samtliga tillstånd $x(t)$:
Tillstånd återkoppling
- Skattning av tillståndet $x(t)$ från mätning av utsignalen $y(t)$:
Observatör (observerare)

Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
 - Önskad snabbhet och dämpning
 - Begränsningar på styrsignalens storlek
 - Robusthet (mot modellfel)
 - Känslighet (mot yttre störningar)
- Allmänna råd:
 - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
 - Poler närmast origo viktigast
 - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning



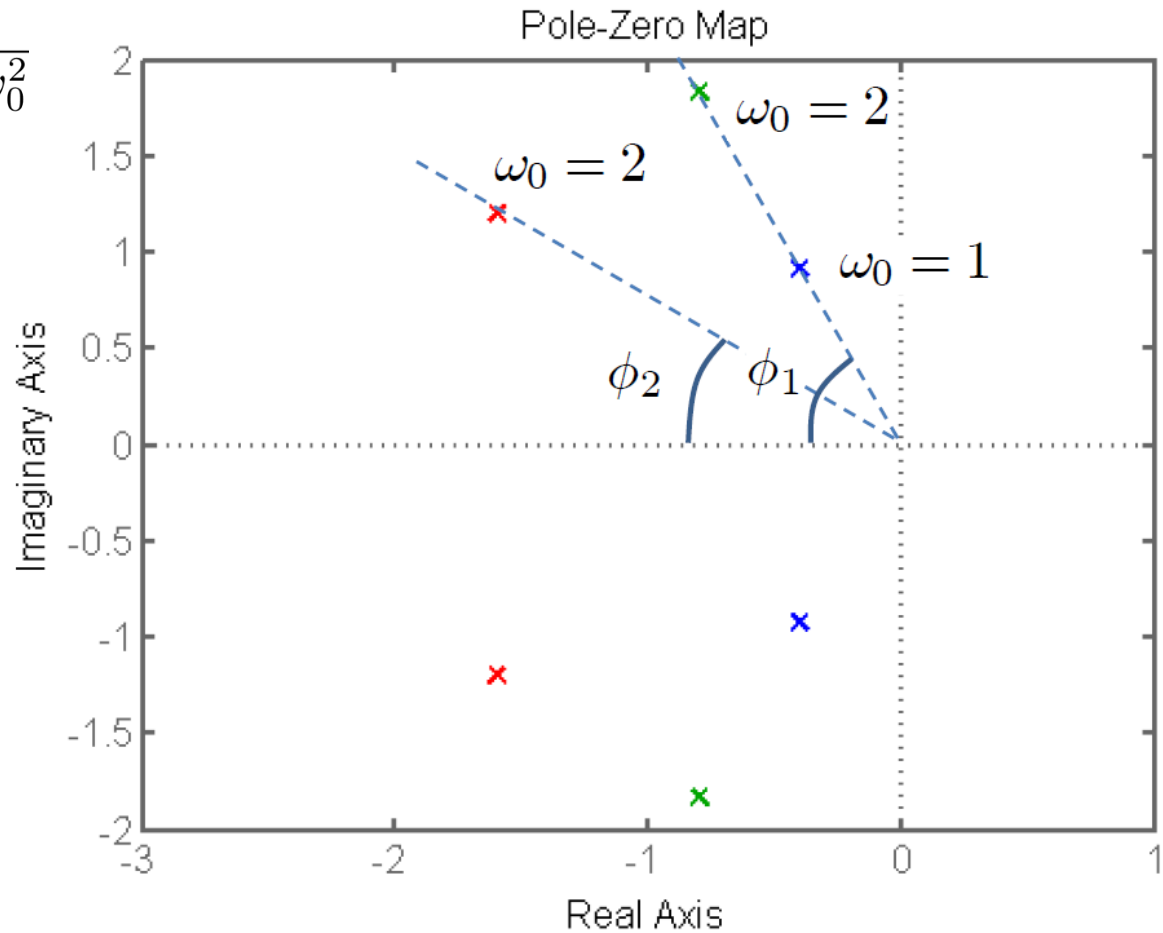
Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

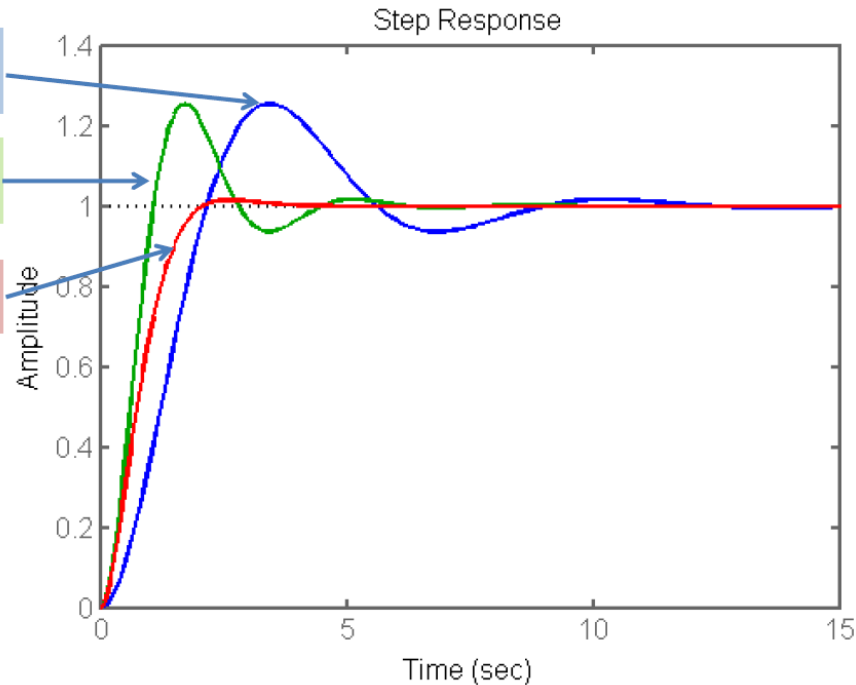
Snabbhet: $\sim 1/\text{stigtid} \approx \omega_0 e^{-\phi/\tan(\phi)}$

Dämpning: $\sim 1/\text{översläng} \approx e^\alpha, \alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\omega_0 = 1, \zeta = 0.4$$

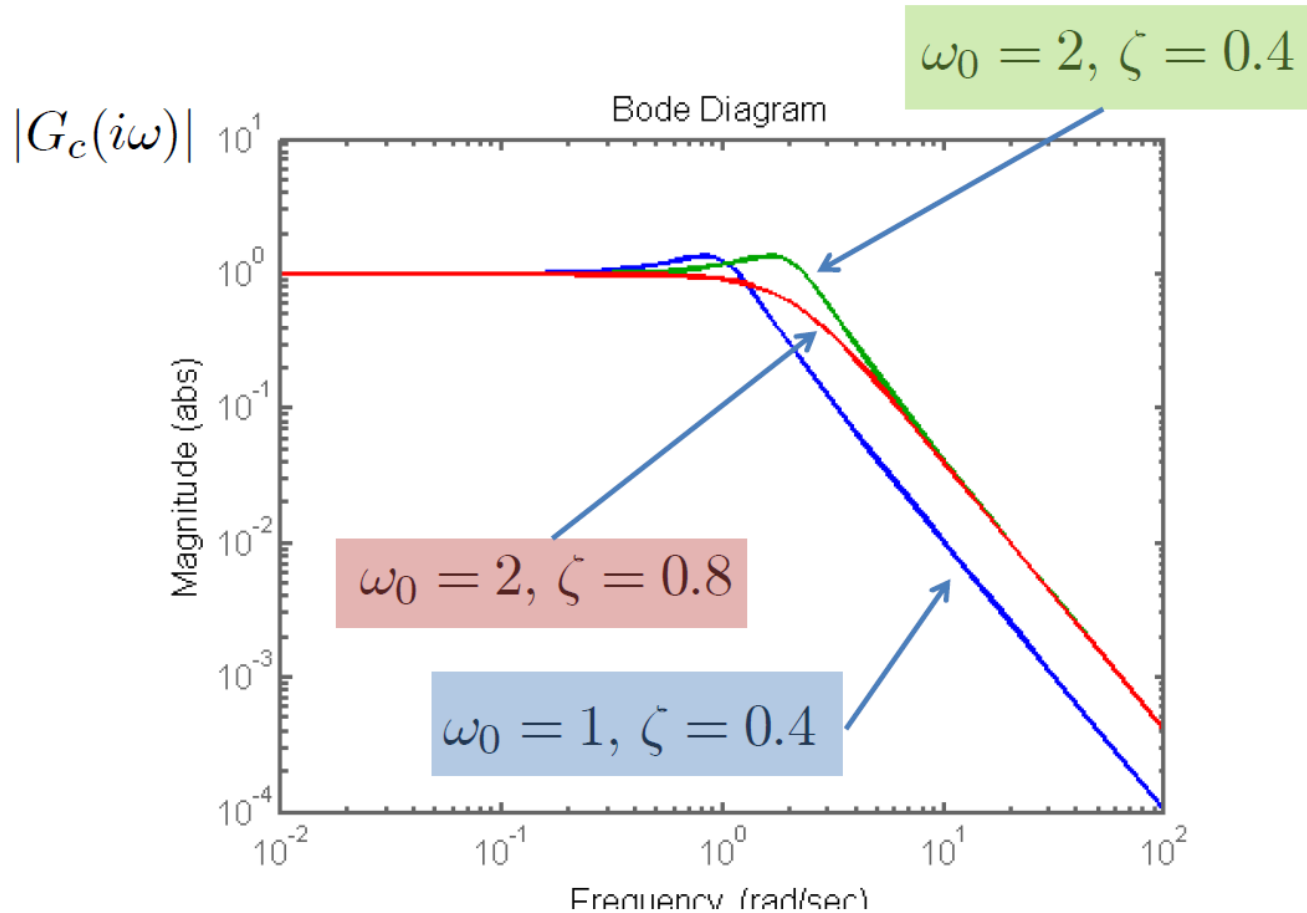
$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.4$$

$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.8$$



(Glad & Ljung:
Exempel 3.3)

Typexempel: Polplacering





Quiz

(1) Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

styrbart?



Quiz

(2) Antag systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = (1 \quad 0) x$$

ska styras med tillståndsåterkopplingen

$$u = - (l_1 \quad l_2) x + l_0 r$$

- Hur ska l_1, l_2 väljas så att polerna hamnar i $\{-1 - i, -1 + i\}$?
- Hur bör man välja l_0 ?



Quiz

(3) Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

observerbart?



Quiz

(4) Antag att en observatör för systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska konstrueras.

Hur ska k_1 och k_2 väljas så att skattningsfelsdynamikens egenvärden hamnar i $\{-2 - 2i, -2 + 2i\}$?

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$
$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$
$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$$