

SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 11

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

23 november 2016

Dagens ämne

- Basbyte
- Matriser för samma linjära avbildning i olika baser

På fredag: Halvvägs! Sammanfattning av kursen hittills

På fredag efter föreläsningen: Kursnämndsmöte!

Koordinater för en vektor i olika baser:

En mängd av 2 linjärt oberoende vektorer i \mathbf{R}^2 är en bas för \mathbf{R}^2 .

Låt $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara standardbasen för \mathbf{R}^2 .

Antag att $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ är en annan bas för \mathbf{R}^2

med $\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$ och $\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$.

Bilda matrisen $P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Detta är basbytesmatrisen från \mathcal{F} till \mathcal{E} , dvs:

$$P [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

(Med notationen $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ menar vi koordinatvektorn för \vec{v} i basen \mathcal{E})

Koordinater för en vektor i olika baser, exempel:

Låt $\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Då är $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ en bas för \mathbf{R}^2 .

Låt $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara standardbasen för \mathbf{R}^2 .

Bilda matrisen $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Då gäller att

$$P [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

Till exempel om $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är koordinaterna för en vektor \vec{v} i basen \mathcal{F} så får vi koordinaterna för samma vektor \vec{v} i basen \mathcal{E} genom

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

Uppgifter:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ är en bas för } \mathbf{R}^3$$

1. Bestäm basbytesmatrisen P för bytet från basen \mathcal{B} till standardbasen \mathcal{E}
2. Vad blir koordinaterna i standardbasen \mathcal{E} för den vektor som i basen \mathcal{B} har koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Inledande exempel:

Låt $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i projektion på linjen $y = 2x$.

Bestäm matrisen för denna avbildning i basen

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

Hur förhåller sig matriserna till varandra?

Sammanfattning:

Låt \mathcal{E} och \mathcal{F} vara två baser för \mathbf{R}^n och låt P vara den $n \times n$ -matris vars kolonner är \mathcal{F} -basvektorernas koordinater i basen \mathcal{E} . Då gäller:

$$1. P [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

$$2. A_{\mathcal{F}} = P^{-1} A_{\mathcal{E}} P$$

I den sista formeln betyder $A_{\mathcal{F}}$ och $A_{\mathcal{E}}$ matriserna för samma linjära avbildning från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^n relativt baserna \mathcal{F} respektive \mathcal{E} .

Uppgift:

Låt $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i spegling i linjen $y = 2x$.

Bestäm matrisen för denna avbildning i basen

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

Exempel:

Låt $R : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som består i rotation 180 grader kring linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

och betrakta basen $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Bestäm matrisen för avbildningen R i basen \mathcal{F}

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

Exempel/Uppgift:

Låt $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som har

standardmatrisen $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -7 & 9 & -5 \\ -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

och betrakta basen $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Bestäm matrisen för avbildningen T i basen \mathcal{F} och försök beskriva med ord vad avbildningen T gör.

Exempel i andra vektorrum än \mathbf{R}^n

1. Är $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{M}(2, 2)$?

2. Avgör om $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

3. Är $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ en bas för \mathbf{P}_2 ? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen.

4. Är $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ en bas för \mathbf{P}_2 ? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen. Hur byter jag koordinater från \mathcal{C} till \mathcal{B} ?

5. Bestäm dimensionen av \mathbf{P}_2 .

6. Låt $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 2 + x^2$ och $r(x) = 1 + x + x^2$. Avgör om $\{p, q, r\}$ är linjärt oberoende.